第 20 章　有界全纯函数与 VMRT 几何理论在刚性问题上的应用

莫毅明

香港大学数学系, 香港, nmok@hkucc.hku.hk

关于不可约有界对称域 Ω 紧致商空间 $X = \Omega/\Gamma$ 的复结构的刚性定理 (其中 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为无挠格点子群) 源自 Calabi-Vesentini[1] 与 Borel[2] 所证明的消灭定理. 按照上述定理, 当 $\dim_{\mathbb{C}}(X) \geqslant 2$ 时, 必然有 $H^1(X, T_X) = 0$, 由此 X 的复结构拥有局部刚性. 萧荫堂在文献 [3] 中发展了一套运用调和映射去研究复结构的方法, 并证明了关于紧致 Kähler 流形的强刚性定理, 即在维数 $n \geqslant 2$ 紧致 Kähler 流形 N 的曲率在对偶 Nakano 意义下是定正 (strictly positive in the dual-Nakano sense) 的前提下, 证明了任意与 N 同胚的紧致 Kähler 流形 M 必然双全纯等价于 N 或者等价于它的共轭流形. 曲率条件在 Ω 的秩等于 1 时成立, 也就是当 Ω 等同于维数 $n \geqslant 2$ 的超球时成立. 当 Ω 的秩 $\geqslant 2$ 时, 曲率在对偶 Nakano 意义下仅仅是半定正的, 然而 Siu[3,4] 仍然证明了紧致商空间 $X = \Omega/\Gamma$ 上的强刚性定理. 根据 Margulis 超刚性定理, 在秩 $\geqslant 2$ 的不可约非紧型黎曼对称空间 (Z, g) 上, 格点子群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(Z, g)$ 拥有超刚性性质. 在 Hermite 对称空间, 也即有界对称域的特殊情况, 当秩大于等于 2 时存在全纯双截曲率 (holomorphic bisectional curvature) 为零的情况. 恰恰是零双截曲率让 Γ 与 X 拥有更强的刚性性质. 莫毅明在文献 [5] 中证明了 X 上的 Hermite 度量刚性定理, 尤其证明了所有在 X 上具非正全纯双截曲率的 Kähler 度量必然等同于 Kähler-Einstein 度量. 文章运用了拓扑方法 (陈类的不变性). 证明关键在于某示性数的消灭定理, 而此事实是依赖 X 上典范 Kähler-Einstein 度量全纯双截曲率的零点的特殊结构得以验证的. 在 Hermite 度量不大于典范 Kähler-Einstein 度量的条件下, Mok[5] 同时证明了非紧有限体积商空间 $X = \Omega/\Gamma$ 上的 Hermite 度量刚性定理, 而此额外条件被杜永强 [6] 利用 Satake-Baily-Borel 紧化予以消除.

本章主要考虑关于秩大于等于 2 不可约有界对称域 Ω 上的有界全纯映射. 设 (N, h) 为具非正全纯双截曲率的 Kähler 流形. 应用 Hermite 度量刚性定理, 可以推论, 任意在有限体积商空间 $X = \Omega/\Gamma$ 上定义而靶空间为 Kähler 流形 (N, h) 的全

纯映射必然是全测地映射. 由于具非正全纯双截曲率的条件是非常强的一个几何条件, 如任意有界齐次域 D 一般并不拥有具非正全纯双截曲率并且 $\mathrm{Aut}(D)$ 不变的 Kähler 度量. 要使度量刚性定理更适合应用在多复变函数论的范畴里, 作者近年来考虑了更具一般性意义的曲率条件, 即要求靶空间拥有具非正曲率的复 Finsler 度量. 例如, 有界域 D 上透过有界全纯函数所定义的 $\mathrm{Aut}(D)$ 不变的 Carathéodory 度量即属此类度量. Hermite 度量刚性定理可以推广到复 Finsler 度量的一般情况, 而此推广可以用来研究 Ω 上的 Γ 共变有界全纯映射, 即由 Ω 至有界域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 按群同态 $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Aut}(D)$ 共变的全纯映射. 一般而言, 复 Finsler 度量的刚性定理仅能控制与极小圆盘相切的矢量. 然而, 对以有界全纯函数定义出来的复 Finsler 度量存在着 (有界全纯) 极值函数的概念. 通过极值函数的研究并运用遍历理论, 可以证明任意非常值 Γ 共变有界全纯映射必然是全纯嵌入. 由 $X = \Omega/\Gamma$ 至有界对称域 Ω' 的商空间 $X' = \Omega'/\Gamma'$ 的全纯映射 $f : X \to X'$ 等同于 Φ 共变的全纯映射 $F : \Omega \to \Omega'$, $\Phi = f_* : \Gamma \to \Gamma'$ 为由 f 诱导出来的群同态. 当 X 为紧致流形并且 Φ 为入射时, $F : \Omega \to \Omega'$ 为逆紧映射, 即对任意紧致子集 $K \subset \Omega'$, $f^{-1}(K) \subset \Omega$ 均为紧致的, 因此, 有界对称域之间的逆紧全纯映射的刚性问题可以说是关于紧致商空间之间全纯映射 $f : X \to X'$ 的刚性问题的一个自然发展. 作者在 Mok[7] 提出了关于有界对称域之间的逆紧全纯映射 $F : \Omega \to \Omega'$ 刚性性质的猜想：设 Ω 不可约并且秩 $:= r \geqslant 2$, 而 Ω' 的秩 r' 不大于 r, 那么 $r' = r$ 而且 F 为全测地映射. 此猜想由蔡宜洵 [8] 所验证. 证明的起点为有界对称域关于有界全纯函数的边界值理论 (参考文献 [9]), 更确切地源自关于圆盘上有界全纯函数的非切向极限 (non-tangential limit) 的 Fatou 引理, 因此边界值理论可视为有界对称域上有界全纯映射刚性性质的一个重要依据 (参考下段关于 VMRT 几何理论的论述). 再者, 也可以透过遍历理论与有界全纯函数的边界值理论重新证明并强化 Γ 共变有界全纯映射的嵌入定理, 由此拓扑方法 (运用非正曲率)、极值函数、边界值理论与遍历理论构成有关秩 $\geqslant 2$ 不可约有界对称域上种种关于有界全纯函数的刚性定理的主要依据.

近十年来, 作者与 Jun-Muk Hwang 在代数几何的领域里发展了一套关于 Fano 流形的几何理论. 这套理论的研究对象是任意可以由有理曲线所覆盖的射影流形, 即任意单直纹射影流形, 而按照 Miyaoka-Mori[10] 定理, 任意 Fano 流形均属此类流形. 这套几何理论着眼于单直纹射影流形上的极小有理切线簇 (variety of minimal rational tangents), 简称 VMRT, 即由经过一般点 $x \in X$ 的所有极小有理曲线的切线所组成的射影子簇 $\mathcal{C}_x(X) \subset \mathbb{P}T_x(X)$. 不可约 Hermite 对称空间可以说是 Picard 数为 1 的 Fano 流形的典型范例. 设 Ω 为任意不可约有界对称域. 按照 Borel 嵌入定理, Ω 可以自然地体现为其对偶空间 S 的开集, 而 S 上的极小有理曲线与 Ω 的交集构成了 Ω 上的极小圆盘. 从这个角度出发, 不难想像关于 Picard 数为 1 的 Fano 流形的 VMRT 几何理论可以应用在有关有界对称域上全纯映射的问题上面.

具体来说, 两个有界对称域之间的逆紧全纯映射 $f:\Omega\to\Omega'$ 的边界值可以透过调和分析的 Fatou 引理取得, 而 $f:\Omega\to\Omega'$ 可以透过积分表示公式由边界值所确定, 从而可以由 f 的边界性质诱导出 f 本身的性质. 特别, 当 Ω' 与 Ω 的秩相同时, 利用 Harish-Chandra 体现的边界分解, 应用归纳法与积分表示公式可以推出 f 必然把 Ω 上的 VMRT 变换为 Ω' 上的 VMRT 的线性截面. 由此, 全纯映射 $f:\Omega\to\Omega'$ 满足某些具局部微分几何意义的全纯微分方程. 此类全纯映射可以透过 VMRT 几何理论中的解析延拓定理得以延续为在有界对称域的扩充空间 (即其紧致对偶空间) 上的亚纯映射. 这种延拓定理为验证有界对称域之间的逆紧全纯映射的刚性性质提供了基础. 本章另外的一个重点在于探讨 VMRT 几何理论已经存在的一些关于刚性问题的应用, 并展望如何由此开拓更宽的一个研究范畴.

往下介绍本章内容的编排. 文章以有界对称域有限体积商空间的度量刚性定理为起点, 在 20.1 节介绍了透过拓扑方法诱导出来的关于 Hermite 度量以至复 Finsler 度量的刚性定理与其在全纯映射上的应用. 由有界全纯函数可以定义 Carathéodory 拟 (复 Finsler) 度量, 在 20.2 节介绍了如何利用 Carathéodory 类型的拟度量并运用遍历理论去研究全纯映射, 重点在于关于秩 $\geqslant 2$ 不可约有界对称域上的 Γ 共变有界全纯映射的嵌入定理, 其中 $\Gamma\subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为格点子群. 全纯映射的嵌入定理是透过关于实李群的 Moore 遍历定理与运用极值 (有界全纯) 函数得以证明的. 20.3 节介绍了关于有界对称域上基础的边界值理论, 并说明了如何在多圆柱上运用边界值理论取得有界全纯映射的嵌入定理, 同时介绍了边界值理论对有界对称域之间的逆紧全纯映射的应用, 由此透过具体例子论证某些逆紧全纯映射必然满足具局部全纯微分几何意义的微分方程, 而此类方程可以透过 VMRT 几何加以描述. 20.4 节从有界对称域与其扩充空间 (即对偶紧型 Hermite 对称空间) 的几何结构出发介绍了此类特例中几何结构与 VMRT 几何理论的关联, 20.5 节对关于单直纹射影流形的 VMRT 几何的一般性理论作了概括性的论述, 其中阐述了保存 VMRT 的双全纯映射芽的解析延拓定理. 20.6 节阐述了上述定理的非同维推广, 由此说明了如何从 20.3 节关于某些逆紧全纯映射的微分方程过渡到刚性定理. 20.7 节对具几何结构的有界域上的全纯映射理论与 VMRT 几何理论之间的密切关系作了总结性和前瞻性的陈述. 透过有界全纯函数的边界值理论与 VMRT 几何理论的相结合, 可以展望发展一套关于具几何结构的有界域上的全纯映射理论, 其研究对象显然包含着有界对称域以至有界齐次域, 并可望扩展至与一系列复齐次流形相关的有界域等更宽的范畴. 本章目录如下:

20.1　有界对称域商空间上的度量刚性定理

设 (X,g) 为具非正全纯双截曲率的紧致 Kähler 流形, 即对任意 $x\in X$; $\xi,\eta\in T_x^{1,0}(X)$, (X,g) 的曲率张量 R 满足 $R_{\xi\bar\xi\eta\bar\eta}\leqslant 0$. 在 (X,g) 为局部不可分解的前提下, (X,g) 上的 Kähler 度量刚性问题指的是在 X 上具非正全纯双截曲率的 Kähler 度量 h 的唯一性问题. 往往只需要 h 为 Hermite 度量, 并且要求 (X,h) 的 Hermite 曲率张量 Θ 满足 $\Theta_{\xi\bar\xi\eta\bar\eta}\leqslant 0$ (一般而言 $\Theta_{\xi\bar\xi\eta\bar\eta}\neq\Theta_{\eta\bar\eta\xi\bar\xi}$). (X,h) 在 Griffiths 意义下是非正的, 而此曲率条件应该理解为 Hermite 矢量丛 (T_X,h) 的曲率性质而并非 (X,h) 作为黎曼流形的曲率性质.

现在举一个最简单的例子以说明度量刚性的意义. 设 $L\subset\mathbb{C}$ 为格点子群, g 为椭圆曲线 $X=\mathbb{C}/L$ 上的欧几里得度量, 并以 z 表 $\mathbb{C}$ 的欧几里得坐标, $g=2\mathrm{Re}(\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}\bar z)$. 设 h 为 X 上任意具非正曲率的 Hermite 度量, $h=2\mathrm{Re}(h_0\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}\bar z)$. 那么, 度量 $g+h$ 的 Gauss 曲率为 $-\dfrac{1}{1+h_0}\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log(1+h_0)$. 在以下运算中为方便起见 h_0 简写为 h. 由于 (X,h) 的 Gauss 曲率为非正的,

$$0\leqslant\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log h=\frac{1}{h}\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial\bar z}\Big)-\frac{1}{h^2}\Big|\frac{\partial h}{\partial z}\Big|^2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log(1+h)&=\frac{1}{1+h}\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial z\partial\bar z}\Big)-\frac{1}{(1+h)^2}\Big|\frac{\partial h}{\partial z}\Big|^2\\&=\frac{h}{1+h}\Big(\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\log h\Big)+\frac{1}{h(1+h)^2}\Big|\frac{\partial h}{\partial z}\Big|^2.\end{aligned}$$

因此, $(X,g+h)$ 具有非正 Gauss 曲率. 另一方面, 由于 X 的亏格等于零, 从 Gauss-Bonnet 公式得知 $(X,g+h)$ 的 Gauss 曲率必然恒等于 0, 由此从上述曲率公式可以推出 h_0 (即公式里的 h) 恒等于某常数 λ, 即 $h=\lambda g$ (诚然 Gauss 公式也蕴涵 (X,h) 的 Gauss 曲率恒等于 0 , 但仅此未能导出 $h=\lambda g$). 这个简单的证明说明 X 上具非正 Gauss 曲率的 Hermite 度量的唯一性源自 Gauss-Bonnet 公式. 从 X 上的 Hermite 度量刚性可以推论以下关于全纯映射的事实: 设 Y 为亏格 $g(Y)\geqslant 1$ 的紧黎曼面, $f:X\to Y$ 为非常值全纯映射, 则 Y 的亏格等于 1, 并且 f 为覆盖映射. 事实上, Y 恒有具常 Gauss 曲率 K 的 Hermite 度量 s, 其中 $g(Y)=1$ 时 $K=0$, $g(Y)\geqslant 2$ 时 $K<0$. 因此, $(X,g+f^*s)$ 在有限个分歧点以外具非正曲率, 所以, 处

处具有非正曲率. 由度量刚性得出 $f^*s = (\lambda - 1)g$, $\lambda > 1$. 因此 $f : (X, g) \to (Y, s)$ 仅差一常数因子是等距的, 由此推论 $f : X \to Y$ 是全纯覆盖映射, 并且 Y 的亏格等于 1 .

上述简单的论证, 充分反映了度量刚性的来由与应用. 首先它源于 Gauss-Bonnet 公式, 也就是微分几何里示性数的不变性. 其次, $(X, g + h)$ 的曲率运算表明了两个具非正曲率的 Hermite 度量的和仍然具有非正曲率. 再者, 度量刚性蕴涵全纯映射的刚性. 以下为 Hermite 度量刚性定理的证明的两个基本原则:

(i) Chern-Weil 形式的积分是不变的, 即与 Hermite 度量的选择无关.

(ii) 在 Hermite 流形 (M, h) 的子流形 $(S, h|_S)$ 上的曲率满足 $\Theta^S_{\xi\overline{\xi}\eta\overline{\eta}} \leqslant \Theta^M_{\xi\overline{\xi}\eta\overline{\eta}}$, 其中 Θ^M 表 (M, h) 的曲率张量, Θ^S 表 $(S, h|_S)$ 的曲率张量.

上述第一项是紧致复流形上关于 Hermite 度量的一个整体的拓扑限制, 第二项是局部的, 称为曲率的递减性. 更具体地, $\Theta^S_{\xi\overline{\xi}\eta\overline{\eta}} = \Theta^M_{\xi\overline{\xi}\eta\overline{\eta}} - \|\sigma(\xi, \eta)\|^2$, 其中 σ 表示 $(S, h|_S) \hookrightarrow (M, h)$ 的第二基本形. 在同一复流形 X 上两个 Hermite 度量 g_1 与 g_2 取和的过程可以理解为 $(X, g_1 + g_2) \hookrightarrow (X, g_1) \times (X, g_2)$ 的等距嵌入. 设 (X, g_1) 与 (X, g_2) 的曲率 (在 Griffiths 意义下) 均为非正的, 由曲率的递减性可以推出 $g_1 + g_2$ 的曲率也是非正的.

关于秩 $\geqslant 2$ 不可约有界对称域的商空间上的度量刚性方面, 莫毅明 [5](紧致情形) 与杜永强 [6](非紧情形) 证明了以下的 Hermite 度量刚性定理.

定理 20.1.1 设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 不可约有界对称域, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为无挠格点子群, $X := \Omega/\Gamma$. 设 g 为 X 上的典范 Kähler-Einstein 度量, h 为 X 上在 Griffiths 意义下具有非正曲率的 Hermite 度量. 那么, 存在正实数 λ 使得 $h \equiv \lambda g$.

定理 20.1.1 的证明是透过上述的两项基本原则得以完成的. 然而, 要贯彻这两项原则必须对 Hermite 局部对称流形 $X := \Omega/\Gamma$ 的代数几何结构仔细描述. 为方便起见往下假设 X 为紧致流形. 以 S 表示 Ω 的紧致对偶流形, $\Omega \subset S$ 表示 Borel 嵌入. 首先, 已知 Ω 上典范 Kähler-Einstein 度量 g_Ω 具有非正全纯双截曲率. g_Ω 在 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 的作用下不变, 由此诱导出 X 上的典范 Kähler-Einstein 度量 g. 若以 $(L, \widehat{h})$ 表示 (T_X, h) 的 (全纯) 重言线丛 (tautological line bundle), 则 (T_X, h) 在 Griffiths 意义下具有非正曲率当且仅当 $(L, \widehat{h})$ 为非正线丛. 设 $\mathcal{S}_\Omega \subset \mathbb{P}T_\Omega$ 为 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 作用下不变的齐次复子流形, $\mathcal{S}_\Omega$ 诱导出 X 上的纤维丛 $\pi : \mathcal{S} \to X$. 设 ν_Ω 为 $\mathbb{P}T_\Omega$ 上 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 不变 Kähler 形式, ν 为 $\mathbb{P}T_X$ 上相对应的 Kähler 形式, $p > 0, q \geqslant 0, p + q = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$, 那么

$$\int_{\mathcal{S}} c_1(L, \widehat{g})^p \wedge \nu^q = \int_{\mathcal{S}} c_1(L, \widehat{g} + \widehat{h}) \wedge c_1(L, \widehat{g})^{p-1} \wedge \nu^q. \tag{20.1.1}$$

显然, $c_1(L, \widehat{g})|_{\mathcal{S}} \leqslant 0$. 如果能选择 $\mathcal{S}$ 使得 $\mathrm{Ker}(c_1(L, \widehat{g})|_{\mathcal{S}}) := Q \neq 0$, 那么 Q 在 $[\alpha] \in \mathcal{S}$ 的维数 $s > 0$ 与 $[\alpha]$ 无关. 可以取 $q = s - 1, p = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} - q$, 使得方程

(20.1.1) 左边的积分量处处等于 0. 由于 $c_1(L,\widehat{g}+\widehat{h})\leqslant 0$, 方程 (20.1.1) 蕴涵在 $\mathcal{S}$ 上 $c_1(L,\widehat{g}+\widehat{h})\wedge c_1(L,\widehat{g})^{p-1}\wedge\nu^q\equiv 0$, 由此对于 $[\alpha]\in\mathcal{S}$ 得出 $\Theta_{\alpha\overline{\alpha}\zeta\overline{\zeta}}(g)=0$ 蕴涵 $\Theta_{\alpha\overline{\alpha}\zeta\overline{\zeta}}(g+h)=0$ 的结论. 最后可以透过 Gauss 方程分析 $(X,g+h)\hookrightarrow(X,g)\times(X,h)$ 的第二基本形 σ, 从而论证能否达到 $\sigma\equiv 0$ 以至 $h\equiv\lambda g$ 的结论.

当 X 为紧致商空间时莫毅明 [5] 对 $\mathcal{S}$ 作出了以下的选择: 设 $\mathcal{S}_M\subset\mathbb{P}T_M$ 表示由 M 上所有与 M 上极小有理曲线相切的矢量所构成的射影流形, $\mathcal{S}_\Omega:=\mathcal{S}_M|_\Omega$ 为 $\mathbb{P}T_\Omega$ 的 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 不变齐次复子流形, 上述证明的构思得以实现, 关键理由如下:

- 对任意 $[\alpha]\in\mathcal{S}_\Omega$ 都存在伴随的全纯双截曲率的零集, 即存在 $[\zeta]\in\mathcal{S}_\Omega$ 使得 α,ζ 同处一点 $x\in\Omega$ 上并且 $R_{\alpha\overline{\alpha}\zeta\overline{\zeta}}=0$.
- 对任意 $[\alpha]\in\mathcal{S}_\Omega, c_1(L,\widehat{g})[\alpha]$ 的零特征根均与 $\mathcal{S}$ 相切.
- 由积分公式 (20.1.1) 诱导出来关于第二基本式 σ 的信息 $\sigma(\alpha,\zeta)=0$ (符号意义如前) 蕴涵了 $\sigma\equiv 0$.

详情参考文献 [5],[7] 或文献 [11] 的论述.

凭着 Hermite 度量刚性定理, 可以透过如同椭圆曲线情形的论证导出以下关于全纯映射的刚性定理 (参见文献 [5], [6]).

定理 20.1.2 设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 不可约有界对称域, $\Gamma\subset\mathrm{Aut}(\Omega)$ 为无挠格点子群, $X:=\Omega/\Gamma$. 设 g 为 X 上的典范 Kähler 度量, (N,h) 为在 Griffiths 意义下具非正曲率的 Hermite 流形. 那么, 任意非常值全纯映射 $f:X\to N$ 必然仅差 —— 常数因子是全纯等距浸入. 若 (N,h) 是 Kähler 流形, 则 f 是全测地映射.

Hermite 度量刚性定理更简单的一个应用是给出 Matsushima[12] 关于紧致商空间 $X=\Omega/\Gamma$ (Ω 不可约并且秩 $\geqslant 2$) 一个早期的拓扑结果: X 的第一 Betti 数 $b_1(X)$ 必然等于 0. 事实上, 假如 $b_1(X)\neq 0$, 则存在有非零全纯 1 次闭形式 $\nu\in\Gamma(X,\Omega_X)$. 那么, $g+2\mathrm{Re}(\nu\otimes\overline{\nu})$ 为 X 上具非正全纯双截曲率的 Kähler 度量. 按 Hermite 度量刚性定理得出 $\sqrt{-1}\nu\wedge\overline{\nu}=(\lambda-1)\omega_g$, 其中 ω_g 为 (X,g) 的 Kähler 形式, 而 $\lambda>1$ 为常数. 显然, $\sqrt{-1}\nu\wedge\overline{\nu}$ 为退化 (1, 1) 形成, 而 $(\lambda-1)\omega_g$ 为定正的, 两者互相矛盾, 也即 $\nu\in\Gamma(X,\Omega_X)$ 不能存在. 利用与在非紧致有限体积情形同样的推论可以导出 $X:=\Omega/\Gamma$ 上并不存在任何全纯 1 次形式 $\nu\neq 0$ (在论证中无需要求 ν 为闭形式). 另一方面, Hermite 度量刚性定理与萧荫堂的 $\partial\overline{\partial}$ Bochner-Kodaira 公式 [3] 相结合, 可以给出紧致商空间 $X=\Omega/\Gamma$ 上的几何超刚性定理的一种形式 (参考文献 [13]). 往下以 (N,h_N) 表非紧型黎曼对称空间. 事实上, 上述公式蕴涵着由可约群表示诱导出来的调和映射 $F:(\Omega,g_\Omega)\to(N,h_N)$ 必然是多调和的, 由此诱导出 $g_\Omega+f^*h_N$ 的 (1,1) 部分为具非正全纯双截曲率的 Kähler 度量, 从而透过 Hermite 度量刚性定理证明 F 必然是全测地映射. 此处 (N,h_N) 为非紧型黎曼对称空间的假设可以由对 Kähler 流形 (N,h_N) 某种非正曲率的要求所取代 [13].

诚然, 上述结果均为特例; Matsushima[12] 的拓扑结果显然是 Margulis[14] 非常

简单的推论, 而非紧型紧致 Hermite 局部对称空间上的几何超刚性定理也为 Mok-Siu-Yeung[15] 的一般的几何超刚性定理所取代. 然而, 上述关于 Hermite 对称空间的论述提供更直接与直观的证明, 并说明了 Kähler 以至 Hermite 几何里非正曲率的特殊含意. 在 20.2 节将讨论一个更宽的非正曲率的概念, 即以复 Finsler 度量代替 Hermite 度量, 从而取得关于全纯映射的嵌入定理.

往下叙述莫毅明 [16]Finsler 度量刚性定理 [16].

定理 20.1.3 设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 的不可约对称域, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为无挠格点子群, $X := \Omega/\Gamma$, 并以 g 标记 X 上的典范 Kähler-Einstein 度量. 设 h 为 X 上具非正曲率的连续复 Finsler 度量. 那么, 存在正常数 λ, 使得对任意极小特征矢量 $\eta \in T_X$, 恒有 $\|\eta\|_h = \lambda\|\eta\|_g$.

运用 Finsler 度量刚性定理可以取得以下关于全纯映射的推论 [16].

定理 20.1.4 设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 并且等价于管状域的不可约有界对称域, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为无挠离散子群, 而 $X := \Omega/\Gamma$ 为紧致商流形. 设 Z 为复流形而 h 为 Z 上具非正曲率的连续复 Finsler 度量, 而 $f : X \to Z$ 为非常值全纯映射. 那么, f 必然在一般点上是全纯浸入, 即 $\dim_{\mathbb{C}}(f(X)) = \dim_{\mathbb{C}}(X)$.

设 Ω 为不可约有界对称域, 以 r 表示 $\mathrm{rank}(\Omega)$, 并以 $\mathcal{M}(\Omega) \subset \mathbb{P}T(\Omega)$ 标记由秩 $< r$ 的矢量所定义的子簇, $\mathcal{M}(X) \subset \mathbb{P}T(X)$ 标记 $\mathcal{M}(\Omega)$ 在 Γ 作用下的商空间. 此处 Ω 等价于管状域的假设, 等同于 $\mathcal{M}_0(\Omega) \subset \mathbb{P}T_0(\Omega)$ 为除子 (即余维等于 1 的子簇) 的假设. 上述 Finsler 度量刚性定理的证明方法可以应用在任意秩 $\geqslant 2$ 的不可约有界对称域的紧致商流形 X 上, 从而得出对任意 $[\eta] \in \mathcal{M}(\Omega)$ 均有 $\mathrm{d}f(\eta) \neq 0$ 的结论. 假如 $\dim_{\mathbb{C}}(f(X)) < \dim_{\mathbb{C}}(X)$, 则对 X 的一般点 x, 逆像 $S^x := f^{-1}(f(x))$ 为维数等于 $s := \dim_{\mathbb{C}}(X) - \dim_{\mathbb{C}}(f(X)) > 0$ 的子流形, 而且 $\mathbb{P}T_x(S^x) \cap \mathcal{M}_x(X) = \varnothing$. 假如 Ω 为管状域, 而 $s \geqslant 2$, 则 $\mathbb{P}T_x(S^x)$ 必然与除子 $\mathcal{M}_x(X) \subset \mathbb{P}T_x(X)$ 相交而产生矛盾. 另一方面, 当 $s = 1$ 时莫毅明 [16] 证明了 S^x 必然是全测地全纯曲线, 并且此类全测地全纯曲线必然是 X 在代数几何意义上的例外子集, 因此不可能有连续的一组不相同的 S^x, 由此产生矛盾, 从而得出定理 20.1.4 的证明.

20.2 遍历理论在有界对称域刚性问题上的应用

就有界对称域 $\Omega = G/K$ 上的刚性问题而言, 遍历理论的应用主要牵涉格点子群 $\Gamma \subset G$ 在伴随着 $G = \mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 的齐次空间 G/H ($H \subset G$ 为闭子群) 上的群作用. 事实上, 在 Finsler 度量刚性定理 (即定理 20.1.3) 的证明当中, 已经使用了与极小特征丛 $\mathcal{S}_\Omega$ 相关的某齐次空间 G/H, 关键在于 $X = \Gamma\backslash\Omega = \Gamma\backslash G/K$ 上的极小特征丛 $\mathcal{S}_X = \Gamma\backslash\mathcal{S}_\Omega$ 上某一典范的叶状结构拥有稠密的叶块, 而此事实正是源自 Γ 在 G/H 的遍历作用, 是往下介绍的 Moore 遍历定理的一个简单推论. 概括

而言, 沿用定理 20.1.1 与其证明中使用的标记符号, 极小特征丛 $\mathcal{S}_\Omega$ 作为齐次空间等同于 G/H, 其中 $H \subset G$ 为 $G = \mathrm{Aut}_0(\Omega)$ 的某一非紧闭子群. 非负闭 (1,1) 形式 $\theta = -c_1(L, \widehat{g})$ 的核 $\mathrm{Ker}\theta$ 在 $\mathcal{S}_\Omega$ 上定义了光滑的叶状结构 $\mathcal{N}_\Omega$, 而其叶块均一一对应地投影到 Ω 上某些全测地复流形上 (详情参考文献 [11]). $\mathcal{N}_\Omega$ 诱导出 X 上的叶状结构 $\mathcal{N} := \Gamma\backslash\mathcal{S}$, 而定理 20.1.1 的证明里使用的积分公式给出复 Finsler 度量 h 在 $\mathcal{N}$ 的每一叶块 Λ 上均与标准度量 $\widehat{g}$ 成比例, 即 $h|_\Lambda = \lambda(\Lambda)\widehat{g}|_\Lambda$. 叶状结构 $\mathcal{N}$ 在 $\mathcal{S}$ 上的动力性质可以透过格点子群 $\Gamma \subset G$ 在 $\mathcal{S}_\Omega = G/H$ 的群作用予以描述. Moore 遍历定理给出 Γ 在 $\mathcal{S}_\Omega$ 的作用是遍历的, 由此得出 $\lambda(\Lambda)$ 恒等于 λ 的结论.

在本节我们将会更进一步和更深入地应用遍历理论, 并介绍如何把后者与有界对称域上的有界全纯函数联结起来. 首先我们系统地引进遍历群作用的概念.

定义 20.2.1 设 $(\mathfrak{X}, \mu)$ 为一 σ 有限测度空间, 而 $\mathfrak{G}$ 为作用在 $\mathfrak{X}$ 上并保存测度 μ 的变换群. 换句话说, 对 $\mathfrak{X}$ 任意 μ 可测子集 $S \subset \mathfrak{X}$ 和任意 $\gamma \in \mathfrak{G}$, 等式 $\mu(\gamma(S)) = \mu(S)$ 成立. $\mathfrak{G}$ 在 $(\mathfrak{X}, \mu)$ 上的作用被称为是遍历的, 当且仅当任意 $\mathfrak{G}$ 不变的子集 $S \subset \mathfrak{X}$ 必然满足 $\mu(S) = 0$ 或 $\mu(\mathfrak{X} - S) = 0$.

遍历作用的概念可以予以推广. 设 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ 为一 Borel 空间, 即 $\mathfrak{B}$ 为 $\mathfrak{X}$ 上的某一 σ 代数. 在 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ 上的两个测度 μ 与 ν 被称为是等价的, 写成 $\mu \sim \nu$, 当且仅当 $\mu(E) = 0$ 等价于 $\nu(E) = 0$ $(E \in \mathfrak{B})$. 一个 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ 上的测度 μ 的等价类 $\{\mu\}$ 被称为测度类. 设 $\mathfrak{G}$ 为作用在 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ 上的变换群, 而对任意 $\gamma \in \mathfrak{G}$ 与任意 $E \in \mathfrak{B}, \mu(E) = 0$ 当且仅当 $\mu(\gamma(E)) = 0$, 则 μ 被称为在 $\mathfrak{G}$ 作用下的拟不变测度, $\mathfrak{G}$ 被称为作用在 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \{\mu\})$ 上的变换群, 或简称 $(\mathfrak{X}, \{\mu\})$ 上的变换群. 例如, 当 G 为一半单实李群, $H \subset G$ 为某一闭子群, 商流形 $\mathfrak{X} := G/H$ 上任意光滑体积元素 μ 定义了 $\mathfrak{X}$ 上的一个测度类 $\{\mu\}$, 其中隐含的 $\mathfrak{B}$ 为由商流形 $\mathfrak{X}$ 上的开集所生成的 σ 代数. G 拥有 Haar 测度 $\mathrm{d}\lambda_G$; 按定义 $\mathrm{d}\lambda_G$ 在 G 的左乘作用下不变. 一般而言, $\mathfrak{X} = G/H$ 未必拥有在 G 的作用下不变的光滑测度. 例如, 当 $G = \mathrm{SU}(1,1)$ 时, G 的元素作为 Möbius 变换作用在黎曼球 $\mathbb{P}^1$ 上, 而单位圆 $S^1 = \partial\Delta$ 为 G 的一个轨道. 设 $H \subset G$ 为任意点 $b \in S^1$ 的迷向子群, 则 $S^1 = G/H$, 而 $S^1 = \partial\Delta$ 在 Möbius 变换的作用下没有不变光滑测度, 但 S^1 上的测度 $\mathrm{d}\theta$ 显然在 Möbius 变换下拟不变.

设 $\mathfrak{G}$ 为作用在 $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \{\mu\})$ 上的变换群, 即 $\mathfrak{B}$ 在 $\mathfrak{G}$ 的作用下不变, 而对任意 $\gamma \in \mathfrak{G}$, 测度类 $\{\gamma^*\mu\}$ 等同于测度类 $\{\mu\}$. 变换群 $\mathfrak{G}$ 的作用被称为是遍历的, 当且仅当任何 $\mathfrak{G}$ 拟不变的子集 $S \subset \mathfrak{X}$ 必然满足 $\mu(S) = 0$ 或 $\mu(\mathfrak{X} - S) = 0$. 此处所说 $S \subset \mathfrak{X}$ 是拟不变的, 指的是对于任何 $\gamma \in \mathfrak{G}$, $\gamma(S) - S$ 与 $S - \gamma(S)$ 均为 μ 测度为零的子集. 显然, 当 μ 被一等价的测度 ν 所取代时, 定义遍历作用的条件并没有改变.

在半单实李群 G 上 Haar 测度 $\mathrm{d}\lambda_G$ 在左乘法的作用下不变, 由此对任意离散子群 $\Gamma \subset G$, $\mathrm{d}\lambda_G$ 在商流形 $\Gamma \setminus G$ 上诱导出体积元素 $\mathrm{d}\lambda_{\Gamma\setminus G}$. $\Gamma \subset G$ 称为格点子群, 当且仅当 $(\Gamma \setminus G, \mathrm{d}\lambda_{\Gamma\setminus G})$ 具有有限体积. 设 $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ 为有限个非紧单

实李群 G_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, 的乘积. 假如 G 可以分解成两个非平凡的半单实李群的乘积 $G' \times G''$, 并且 Γ 拥有有限指数正规子群 (normal subgroup of finite index) $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 使得 $\Gamma_0 = \Gamma' \times \Gamma''$, $\Gamma' \subset G'$, $\Gamma'' \subset G''$ 均为格点子群, 那么, $\Gamma \subset G$ 称为可约格点子群, 否则, $\Gamma \subset G$ 称为不可约格点子群 (关于后者的一般性质, 参考文献 [17]). 在我们关于有界对称域上刚性问题的研究中, 遍历理论的运用主要源自下述关于不可约格点子群 $\Gamma \subset G$ 的 Moore 遍历定理 (参考文献 [18], Theorem 2.2.6, 第 19 页]).

定理 20.2.1(Moore 遍历定理) 设 $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ 为有限个非紧单实李群 $G_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的乘积, 而 $\Gamma \subset G$ 为一不可约格点子群. 设 $H \subset G$ 为某一闭子群, 并考虑以右乘法在 $\Gamma \setminus G$ 所定义的 H 作用. 那么, 变换群 H 在 $\Gamma \setminus G$ 的作用为一遍历作用, 当且仅当 H 为非紧子群.

往下为关于半单实李群上的闭子群的一个基础的遍历理论的结果 (参考文献 [18], Corollary 2.2.3, 第 18 页).

引理 20.2.1 设 G 为任意半单实李群, 而 S_1, $S_2 \subset G$ 为 G 的闭子群. 那么, 在 G/S_2 上以左乘法所定义的 S_1 作用为遍历作用, 当且仅当在 $S_1 \setminus G$ 上以右乘法所定义的 S_2 作用为遍历作用.

运用 Moore 遍历定理 (即定理 20.2.1) 与引理 20.2.1, 得出以下对本节相当重要的推论.

推论 20.2.1 设 $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ 为有限个非紧单实李群 $G_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的乘积, $\Gamma \subset G$ 为 G 的不可约格点子群, 而 $H \subset G$ 为一闭子群. 那么, 在 G/H 上以左乘法所定义的 Γ 作用为遍历作用, 当且仅当 $H \subset G$ 为非紧子群.

运用上述推论和关于群作用的遍历性质与稠密轨道的一般性结果 (参考文献 [18]), 可以诱导出下述对本节的论证非常有用的关于稠密轨道的结果.

引理 20.2.2 设 $G = G_1 \times \cdots \times G_k$ 为有限个非紧单实李群 $G_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的乘积, $H \subset G$ 为非紧致闭子群, $\Gamma \subset G$ 为不可约格点子群. 那么, 存在有零测度的例外集合 $E \subset G/H$, 使得对任意点 $gH \in G/H - E$, gH 在 Γ 左乘的作用下的轨道 $\Gamma gH \subset G/H$ 必然是稠密的.

设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 的不可约对称空间, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为无挠格点子群 $X := \Omega/\Gamma$, 在定理 20.1.1 里我们证明了 Hermite 度量刚性定理, 即 X 上具 (Griffiths 意义下) 非正曲率的 Hermite 度量的唯一性, 从而导出关于 X 上全纯映射的刚性定理. 假设 (N, h) 为具有非正双全纯曲率的 Kähler 流形, g 为 X 上的 Kähler-Einstein 度量, $f : X \to N$ 为非常值全纯映射, 那么, f 必然是全测地映射, 而且仅差一常数因子必然是等距映射. 应该指出, 如果 (N, h) 为拥有非正全纯双截曲率的完备 Kähler 流形, 那么 $f : X \to N$ 往万有覆盖的提升 $F : \Omega \to \widetilde{N}$ 必然是入射的. 事实上, 万有覆盖 $(\widetilde{N}, \widetilde{h})$ 为 Cartan-Hadamard 流形, 因此, 根据比较定理全测地映射必然是入射的.

作为关于 $X = \Omega/\Gamma$ 上全纯映射的刚性定理, 定理 20.1.2 适用于有界对称域 Ω' 的商流形 $N = \Omega'/\Gamma'$, 亦适用于某些有界齐次域 D 的商流形. 然而, 一般而言有界齐次域 D 并不拥有 $\mathrm{Aut}(D)$ 不变的 Kähler 度量, 由此在实际应用上定理 20.1.2 的适用范围有着相当的限制. 显然, 定理 20.1.2 是牵涉 Kähler 度量或者更一般的 Hermite 度量的刚性定理. 然而, 就 $f:(X,g)\to(N,h)$ 为定距浸入的命题而言 (其中 g 为其某个倍数 $c\cdot g$ 所取代), 可以导出 f 必然是全纯浸入, 而后者仅仅牵涉复结构, 与度量无关. 假如更进一步假设 (N,h) 为完备 Kähler 流形并且具有非正全纯双截曲率, $F:\Omega\to\widetilde{N}$ 必然是入射的, 由此 F 必然是全纯嵌入. 就定理 20.1.2 关于全纯映射的应用而言, Hermite 或 Kähler 度量可以理解为证明的工具. 从这个角度出发, 任意 Stein 流形上的有界域 D 均拥有具非正曲率的 Carathéodory 度量, 此度量为 $\mathrm{Aut}(D)$ 不变的复 Finsler 度量, 由此可以应用 Finsler 度量刚性定理 (即定理 20.1.3). 在此更宽的范畴里, 我们证明了以下的全纯映射刚性定理.

定理 20.2.2 设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 不可约有界对称域, $\Gamma\subset\mathrm{Aut}(\Omega)$ 为无挠格点子群 $X:=\Omega/\Gamma$. 设 D 为任意 Stein 流形上的有界域, $\Phi\subset\mathrm{Aut}(D)$ 为无挠格点子群, $N:=D/\Phi$. 设 $f:X\to N$ 为非常值全纯映射, $F:\Omega\to D$ 为其往万有覆盖空间的提升. 那么, $F:\Omega\to D$ 必然是全纯嵌入.

定理 20.1.3 适用于任意具非正曲率的连续复 Finsler 度量. 然而, 定理 20.2.2 的证明的关键在于其中使用的复 Finsler 度量的特殊性. 假如以 g 表示 X 上的 Kähler-Einstein 度量, 并以 h 表 N 上由 D 的 Carathéodory 度量所诱导出来的复 Finsler 度量, 以 $[\alpha]\in\mathcal{S}_X$ 表任意点 (即 α 为 X 上的任意极小特征矢量), 那么, 由定理 20.1.3 得出 $\|\mathrm{d}f(\alpha)\|_h = c\|\alpha\|_g$. 其中 c 为某一与 α 无关的正常数. 特别地, $\mathrm{d}f(\alpha)\neq 0$. 要证明 $f:X\to N$ 是全纯浸入, 必须证明对任意非零 $(1,0)$ 矢量 η 恒有 $\mathrm{d}f(\eta)\neq 0$. 然而, 一般而言, Finsler 度量刚性定理完全不适用于 $[\eta]\notin\mathcal{S}_X$. 为了证明 $\mathrm{d}f(\eta)\neq 0$, 我们运用了 Carathéodory 度量的特殊性, 也就是运用了伴随此度量的极值有界全纯函数 (extremal bounded holomorphic function) 的概念.

在任意复流形 M 上以 $\mathcal{H}(M)$ 标记由所有从 M 至单位圆盘 Δ 的全纯映射 $f:M\to\Delta$ 所组成的集合. $\kappa(M)$ 上的 Carathéodory 拟度量 $\kappa(M)$ 按以下定义：设 $x\in M,\eta\in T_x(M)$, 并以 $\mathrm{d}s^2_\Delta$ 表示单位圆盘 Δ 上的 Poincaré 度量 $2\mathrm{Re}\,\dfrac{|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2}$, 则

$$\|\eta\|_{\kappa(M)} = \sup\left\{\|\mathrm{d}h(\eta)\|_{ds^2_\Delta}\middle|h\in\mathcal{H}(M)\right\}.$$

根据 Montel 定理, 对任意 η 恒有 $s=s_\eta\in\mathcal{H}(M)$ 使得

$$\|\eta\|_{\kappa(M)} = \|\mathrm{d}s(\eta)\|_{ds^2_\Delta}.$$

其中 s 称为适合 η 的 Carathéodory 极值有界全纯函数. 如果在射影化全纯切丛

$\mathbb{P}T_M$ 的重言线丛 L 上引进局部全纯基 e, 并以 $\|e\|^2_{\kappa(M)} = h_0 = \mathrm{e}^{\varphi}$ 定义局部函数 h_0 与 φ, 那么, 按 Cauchy 估计 h_0 是连续并且是均匀 Lipschitz 函数. 由于 $-\log(1-|z|^2)$ 是多次调和函数, 所以 φ 也是多次调和函数, 而且 $\varphi : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是连续函数. $\kappa(M)$ 的曲率流 (curvature current) $\Omega_{\kappa(M)}$ 按

$$\Omega_{\kappa(M)} = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log \mathrm{e}^{\varphi} = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi$$

定义, 因此 $\kappa(M)$ 为 M 上一个具非正曲率的连续复 Finsler 度量.

现在考虑在定理 20.2.2 里的秩 $\geqslant 2$ 的不可约有界对称域 Ω 和无挠格点子群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$. 设 Γ 按照 $\gamma(h) = h \circ \gamma$ 作用在 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上. 设 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ 为在 Γ 的作用下不变的子集. 在 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上我们引进在紧致子集上均匀收敛所定义的拓扑, 并假设相对于此拓扑结构 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ 为闭子集. 若以 $\kappa(\mathcal{G})$ 标记由

$$\|\eta\|_{\kappa(\mathcal{G})} = \sup\left\{\|\mathrm{d}h(\eta)\|_{ds^2_{\Delta}} | h \in \mathcal{G}\right\}$$

所定义的拟度量, 则 $\kappa(\mathcal{G})$ 为 Ω 上具有非正曲率的连续复 Finsler 度量. $h \in \mathcal{G}$ 称为适合 η 的 $\kappa(\mathcal{G})$ 极值 (有界全纯) 函数, 当且仅当 $\|\eta\|_{\kappa(\mathcal{G})} = \|\mathrm{d}h(\eta)\|_{ds^2_{\Delta}}$. 由于 $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}(M)$ 为闭子集的假设, 根据 Montel 定理, 对任意 $\eta \in T_{\Omega}$ 均存在有适合 η 的 $\kappa(\mathcal{G})$ 极值函数.

为了证明定理 20.2.2 里 $f : X \to N$ 必然是全纯浸入, 我们在 Ω 上取 $\mathcal{G} = \mathcal{F} := F^*\mathcal{H}(D)$. 由于 F 按定义是 Γ 共变的, $\mathcal{F}$ 显然在 Γ 的作用下不变. 任意 $s \in \mathcal{F}$ 可以写成 $s = h \circ F, h \in \mathcal{H}(D)$. 假如 $\{s_i\}$ 在 Ω 的紧致子集上均匀收敛于 $s \in \mathcal{F}$, 那么 $s_i = h_i \circ F$ 而 h_i 的某子序列在紧致子集上均匀收敛为某有界全纯函数 $h \in \mathcal{H}(D)$. 因此, 在 Ω 上可以定义 $\kappa(\mathcal{F})$ 极值函数. 以 r 表 $\mathrm{rank}(\Omega)$. 设 $x \in \Omega, \eta \in T_x(\Omega)$ 为非零矢量. 存在有包含 x 的极大多圆柱 P, 即 $P \subset \Omega$ 为全纯等价于 r 维多圆柱 Δ^r 的全测地复子流形, 使得 $\eta \in T_x(P)$. 以 $(z_1, \cdots, z_r)$ 表示 P 上一组欧几里得坐标, $x = (x_1, \cdots, x_r), \eta = \eta_1\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \eta_r\dfrac{\partial}{\partial z_r}$, 并可假设 $\eta_1 \neq 0$. 设 $s \in \mathcal{F}$. 那么, 存在有 $h \in \mathcal{H}(D)$ 使得 $s = h \circ F$, 由此 $\mathrm{d}s(\eta) = \mathrm{d}h\big(\mathrm{d}F(\eta)\big)$. 如果 $f : \Omega \to N$ 并非全纯浸入, 即 $F : \Omega \to D$ 并非全纯浸入, 那么, 存在 $x \in \Omega, \eta \in T_x(\Omega), \eta \neq 0$ 而 $\mathrm{d}F(\eta) = 0$, 由此 $\mathrm{d}s(\eta) = 0$. 如果能够找到 $s \in \mathcal{F}$ 使得对任意 $(z_2, \cdots, z_r) \in P' \cong \Delta^{r-1}; P := \Delta \times P'$, 恒有

$$(\sharp)\ s(x_1, z_2, \cdots, z_r) = s(x_1, \cdots, x_r),$$

即 $s : P \to \Delta$ 在自然投影 $\pi : P \to P'$ 下在 x_1 上的纤维 $\pi^{-1}(x_1) = \{x_1\} \times P'$ 上是常数, 那么

$$\mathrm{d}s(\eta) = \mathrm{d}s\left(\eta_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right) = \eta_1\frac{\partial s}{\partial z_1}(x).$$

由此仅需附加

$$(\flat)\ \frac{\partial s}{\partial z_1}(x) \neq 0$$

的额外条件就导出矛盾. 往下证明某些 $\kappa(\mathcal{F})$ 极值函数 $s \in \mathcal{F}$ 满足上述要求的两项条件 $(\sharp)$ 与 $(\flat)$.

要验证$(\sharp)$, 关键在于 Finsler 刚性定理 (即定理 20.1.3) 的应用. 在极大多圆柱 $P = \varDelta \times P'$ 上, 矢量场 $\dfrac{\partial}{\partial z_1}$ 的长度$\left\|\dfrac{\partial}{\partial z_1}\right\|_{\kappa(\mathcal{F})}$ 在 $\pi : P \to P'$ 的纤维 $\{x_1\} \times P'$ 上根据定理 20.1.3 恒等于某常数 $\lambda(x_1)$. 往下以 $\alpha(z)$ 标记在点 $z \in P$ 上的矢量 $\dfrac{\partial}{\partial z_1}$. 可以假设 $x = 0$. 设 s 为适合 $\alpha(0) = \dfrac{\partial}{\partial z_1}$ 的 $\kappa(\mathcal{F})$ 极值函数. 那么, 在 $z = (0, z')$ 上

$$\|\alpha(z)\|_{\kappa(\mathcal{F})} \geqslant \|\mathrm{d}s\big(\alpha(z)\big)\|_{\mathrm{d}s^2_{\varDelta}} = \frac{|\mathrm{d}s\big(\alpha(z)\big)|}{1 - |s(z)|^2} := \mathrm{e}^{\psi(z')};$$

$$\|\alpha(0)\|_{\kappa(\mathcal{F})} = \frac{|\mathrm{d}s\big(\alpha(0)\big)|}{1 - |s(0)|^2} = |\mathrm{d}s\big(\alpha(0)\big)| = \mathrm{e}^{\psi(0)}.$$

由定理 20.1.3 得出 $\|\alpha(z)\|_{\kappa(\mathcal{F})} = \|\alpha(0, z')\|_{\kappa(\mathcal{F})}$ 与 $z' \in P'$ 无关, 因此多次调和函数 $\psi(z')$ 在 $0 \in P'$ 点取极大值, 从而导出 $\psi(z')$ 为常数的结论. 然而,

$$\psi(z') = \log |\mathrm{d}s\big(\alpha(0, z')\big)| - \log\big(1 - |s(0, z')|^2\big)$$

为两多次调和函数之和, 由此得出多次调和函数 $\nu(z') := -\log\big(1 - |s(0, z')|^2\big)$ 必然是多调和函数. 然而 $s(0) = 0$, 由此 $0 \in P'$ 显然是多调和函数 ν 的极小点, 因此 ν 也必然是常值函数. 即 $s(0, z') = s(0) = 0$, 从而验证了条件 $(\sharp)$.

要证明定理 20.2.2, 主要困难在于要证明 $F : \varOmega \to D$ 必然是入射的. 为此以上述证明 $F : \varOmega \to D$ 为浸入的方法为引子, 我们强化条件 $(\sharp)$, 要求选择 $s \in \mathcal{F}$ 使得

$$(\sharp\sharp) \quad s(z_1, \cdots, z_r) = s_0(z_1),$$

即 $s \in \mathcal{F}$ 在极大多圆柱 P 上仅为 $\pi : P \to \varDelta$ 在底空间 $\varDelta$ 上的全纯函数. 同时我们要求

$$(\flat\flat) \quad s_0 : \varDelta \to \mathbb{C} \text{ 为入射的.}$$

现在首先假设存在满足 $(\sharp\sharp)$ 与 $(\flat\flat)$ 的 $s \in \mathcal{F}$, 并由此导出 $F : \varOmega \to D$ 为入射的. 设 x 与 y 为 $\varOmega$ 上任意两相异点, 即 $x \neq y$. 存在有极大多圆柱 $P \subset \varOmega, P = \varDelta \times P'$, 使得 x 与 y 均处于 P 上, 而且 $\pi(x) \neq \pi(y)$. 任意 $s \in F$ 按定义均可写成 $s = h \circ F$, 其中 $h \in \mathcal{H}(D)$. 如果 $F : \varOmega \to D$ 并非入射的, 那么, 可以选择 $x \neq y$ 使得 $F(x) = F(y)$, 由此对任意 $s \in \mathcal{F}, s(x) = h\big(F(x)\big) = h\big(F(y)\big) = s(y)$, 显然得出矛盾, 由此以反证导出 $F : \varOmega \to D$ 为入射的结论.

条件 ($\sharp\sharp$) 与 ($\flat\flat$) 牵涉两个完全不同的难题. 要解决前者, 我们引进一个新的度量, 目的在于证明相对于此度量的极值有界全纯函数 s 满足条件 ($\sharp\sharp$), 即在给定的极大多圆柱 $P = \Delta \times P'$ 上满足 $s(z_1, \cdots, z_r) = s_0(z_1)$. 要解决后者, 我们引进一个把单复变函数线性化的方法从而得出满足条件 ($\flat\flat$) 的新的函数 $\sigma \in \mathcal{F}$. 此方法依赖于遍历理论, 具体来讲依赖于 Moore 遍历定理 (即定理 20.2.1) 与它的推论.

往下介绍如何定义新的度量以寻找满足 ($\sharp\sharp$) 的极值函数, 首先回顾 $\kappa(\mathcal{F})$ 极值函数 s 为何满足 ($\sharp\sharp$) 的论证, 即 $s(0, z_2, \cdots, z_n)$ 与 $z' = (z_2, \cdots, z_n)$ 无关的事实. 在论证中, 函数 $\nu(z') = -\log\left(1 - |s(0, z')|^2\right)$ 被证明为多调和函数. 由于 $s(0) = 0, -\nu$ 于 $0 \in P'$ 取最大值, 因此按最大值原理 ν 必然是常值函数, 即对任意 $z' \in P'$, 恒有 $s(0, z') = 0$. 证明最后的步骤可以作以下的更改. 由于 $\nu(z')$ 为多调和函数, 恒有

$$0 = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\nu = \pi^*\left(\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}(-\log(1 - |z|^2))\right) = \pi^*\omega_\Delta,$$

其中 $\omega_\Delta = \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\left(-\log(1 - |z|^2)\right)$ 为单位圆盘 Δ 上的 Poincaré 度量的 Kähler 形式. 由 $\pi^*\omega_\Delta = 0$ 而 $\omega_\Delta > 0$ 导出 $\pi|_{\{z_1\}\times P'}$ 为常值函数的结论. 我们要求 s 满足更强的条件 ($\sharp\sharp$), 即要求对任意 $z_1 \in \Delta, s|_{\{z_1\}\times P'}$ 均为常值函数. 要证明后者, 根据全纯函数的恒等定理仅需要证明存在有解析局部曲线 $\gamma \subset \Delta$, 使得对任意 $z_1 \in \gamma, s|_{\{z_1\}\times P'}$ 均为常值函数. 往下取 γ 为以 0 为原点而半径为 ϵ 的 Poincaré 测地圆 (geodesic circle). 现在我们引进一个仅仅对极小特征矢量 α 才有定义的度量 $e(\mathcal{F})$, 后者可以理解为在极小特征丛 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\Omega$ 的重言线丛 $L|_\mathcal{S}$ 上定义的 Hermite 度量. 设 α 为 $x \in \Omega$ 上 (非零) 极小特征矢量, 则 α 与某极小圆盘 D_α 相切.

定义 $\|\alpha\|_{e(\mathcal{F})}$ 如下. 设 $s \in \mathcal{F}$. 在圆盘 D_α 上取 $\Psi : D_\alpha \cong \Delta$ 为一双全纯同构, 其中 $\Psi(x) = 0$. 透过 Ψ 给出 D_α 的极坐标 (r, θ), 而 $\partial B_\alpha(x; \varepsilon)$ 对应于圆 $r = \delta, \delta > 0$. 运用 Δ 上的 Möbius 变换得出光滑的一组自同构 $\varphi_\theta \in \mathrm{Aut}(D_\alpha), \theta \in [0, 2\pi], \varphi_0 = \varphi_{2\pi}$, 使得 $\varphi_\theta(x) \in \partial B_\alpha(x, \varepsilon), \varphi_\theta(x)$ 的极角度为 θ. 定义 $\alpha_\theta := \mathrm{d}\varphi_\theta(\alpha) \in T_y(D_\alpha)$, 其中 $y = \varphi_\theta(x)$ 的极坐标为 (δ, θ), 然后定义

$$\|\alpha\|_s := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\mathrm{d}s(\alpha_\theta)\|\mathrm{d}\theta;$$

$$\|\alpha\|_{e(\mathcal{F})} := \sup\left\{\|\alpha\|_s : s \in \mathcal{F}\right\}.$$

注意 $e(\mathcal{F})$ 作为 $L|_\mathcal{S}$ 上的 Hermite 度量并不显然具有非正曲率. 从定义出发仅能证明 $e(\mathcal{F})$ 在叶化结构 $\mathcal{N}$ 的叶块上具有非正曲率的性质, 而此种部分的非正曲率性质, 加上 $e(\mathcal{F})$ 显然的均匀 Lipschitz 性质已经可以让 Finsler 刚性定理 (即定理 20.1.3) 的证明方法派上用场, 由此甚至在 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为非均匀 (即 $X := \Omega/\Gamma$ 为有限体积非紧商流形) 的情形也可以得出 $e(\mathcal{F}) = \lambda \cdot \widehat{g}|_\mathcal{S}$ 的结论, 其中 $\widehat{g}$ 为在 L 上由 Kähler-Einstein 度量诱导出来的 Hermite 度量, 而 λ 为一正常数. 证明中运用

了 $\mathcal{N}$ 上稠密叶块的存在性, 而此点恰恰是 Moore 遍历定理的推论 (详情参考文献 [19]).

往下解释为何 $e(\mathcal{F})$ 在 $\mathcal{N}$ 的 (全纯) 叶块 Λ 上具有非正曲率. $\Lambda \subset \mathcal{S}_\Omega$ 对应于 Ω 上某全测地复子流形 $\Delta \times \Omega' \subset \Omega$ 上的子集 $\{x_1\} \times \Omega' = \Lambda_0$, 其中 $x_1 \in \Delta$ 为任意点. 恰恰是 $\Delta \times \Omega'$ 的乘积结构给出 $e(\mathcal{F})|_\Lambda$ 的非正曲率性质. 事实上, 以 (z_1, z') 标记 $\Delta \times \Omega'$ 上的欧几里得坐标, 以 $\alpha = \lambda \dfrac{\partial}{\partial z_1}$ 表示 $x = (x_1, x')$ 上的与单位圆盘 Δ 相切的非零矢量, 以 $\widetilde{\alpha}$ 标记在 Λ_0 上的常值矢量场 $\lambda \dfrac{\partial}{\partial z_1}$, $\|\widetilde{\alpha}\|_{e(\mathcal{F})} = \mathrm{e}^u \|\widetilde{\alpha}\|_g$ (其中 $\|\widetilde{\alpha}\|_g$ 为某常数 c), 那么, 前述关于 $e(\mathcal{F})$ 在极大多圆柱 $P = \Delta \times P'$ 上的定义自然适用于 $\Delta \times \Omega', P' \subset \Omega'$, 而在 Λ_0 上 $\|\widetilde{\alpha}\|_{e(\mathcal{F})} = \sup\{\|\widetilde{\alpha}\|_s | s \in \mathcal{F}\}$. 当 $s \in \mathcal{F}$ 被固定时, $\|\widetilde{\alpha}\|_s$ 在 Λ_0 上是一个平均值, 可以描述为 $\|\widetilde{\alpha}\|_s = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \|\mathrm{d}s(\widetilde{\alpha}_\theta)\| \mathrm{d}\theta$, 其中 $\widetilde{\alpha}_\theta = \alpha_\theta(z')$, 当 $z' = x'$ 时 $\alpha_\theta(x') = \alpha_\theta$ 按上述的定义为 $\varphi_\theta(x) \in \partial B_\alpha(x; \varepsilon)$ 上的矢量, 而 $\widetilde{\alpha}_\theta = \alpha_\theta(z')$ 为 $\{\varphi_\theta(x)\} \times \Omega'$ 上的常值矢量场. 若以 $\|\widetilde{\alpha}\|_s = \mathrm{e}^\varphi, \|\widetilde{\alpha}_\theta\|_s = \mathrm{e}^{u_\theta}$ 定义 Λ_0 上的函数 φ 与 u_θ, 那么, e^φ 与 e^{u_θ} 为 Λ_0 上均匀 Lipschitz 函数,

$$\varphi = \log \|\widetilde{\alpha}\|_s = \log \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u_\theta} \mathrm{d}\theta \right)$$

其中度量 $e(\mathcal{F})$ 的非正曲率性质源自以下的引理 (参考文献 [19], (3.3), Lemma 4, 第 17 页).

引理 20.2.3 设 $U \subset \mathbb{C}^n$ 为开集, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. 设 $u : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ 为连续函数, 以 $u_t(z)$ 表 $u(t, z), a \leqslant t \leqslant b$, 并假设对任意 $t \in [a, b], u_t : U \to \mathbb{R}$ 均为多次调和函数. 设 $c > 0$ 并按公式 $\mathrm{e}^\varphi = c \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{u_t} \mathrm{d}t$ 定义连续函数 $\varphi : U \to \mathbb{R}$. 那么, φ 为多次调和函数, 并且作为 (1,1) 流恒有

$$\mathrm{e}^\varphi \sqrt{-1} \partial \overline{\partial} \varphi \geqslant \int_a^b \mathrm{e}^{u_t} \sqrt{-1} \partial \overline{\partial} u_t \mathrm{d}t.$$

注意我们选择的 u_θ 可能有 $-\infty$ 点, 在引用引理 20.2.1 时仅需透过简单的光滑化程序使引理适用, 例如, u_θ 可以用 $\dfrac{1}{2} \left(\log \|\mathrm{d}s(\widetilde{\alpha}_\theta)\|^2 + \delta \right)$ 来取代, 其中 $\delta > 0$ 任意小.

引理 20.2.3 的证明依赖于 Gauss 公式, 更确切地依赖于第 20.1 节里所阐明的一个复几何的基本原则, 即在全纯线丛上两个具非正曲率的 Hermite 度量的和 $h_1 + h_2$ 依然具有非正曲率. 引理 20.2.3 中 e^φ 可视为平凡线丛上的 Hermite 度量, 透过积分方法取平均值得以定义, 而黎曼积分可以视为有限和的极限. 引理中 $\sqrt{-1} \partial \overline{\partial} \varphi$ 的

下限也是凭着 Gauss 公式里牵涉等距嵌入 $(L, h_1+h_2) \hookrightarrow (L, h_1) \oplus (L, h_2)$ 的第二基本形的部分得以证明. 从函数论的角度出发, 引理 20.2.1 完全可以从下面关于多次调和函数的公式诱导出来：设 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为开集, $u_1, u_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ 为光滑 (1,1) 形式, 则恒有

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{e}^{u_1}+\mathrm{e}^{u_2})\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\log(\mathrm{e}^{u_1}+\mathrm{e}^{u_2}) \\
&= \mathrm{e}^{u_1}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}u_1 + \mathrm{e}^{u_2}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}u_2 + \frac{\mathrm{e}^{u_1+u_2}}{\mathrm{e}^{u_1}+\mathrm{e}^{u_2}}\sqrt{-1}(\partial u_1 - \partial u_2)\wedge\overline{(\partial u_1-\partial u_2)}.
\end{aligned}
$$

应用引理 20.2.3 可以导出以下的结果. 往下我们说极大多圆柱 $P = \Delta \times P'$ 与非零矢量 $\alpha \in T_x$ 相适应, 指的是 α 的基点 $x \in P \cong \Delta \times P', x = (x_1, x')$, 并且 $\alpha \in T_x(\Delta \times \{x'\})$.

命题 20.2.1 设 $\alpha \in T_x$ 为非零极小特征矢量, $s \in \mathcal{F} = F^*\mathcal{H}(D)$ 为适应于 α 的 $e(\mathcal{F})$ 极值有界全纯函数. 设 $P = \Delta \times P'$ 为与 α 相适应的极大多圆柱, 并以 $z = (z_1, z') = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 标记 P 的欧几里得坐标. 那么, 存在 $s_0 : \Delta \to \Delta$ 使得 $s(z, z') = s_0(z)$.

证明 以 $x = (x_1, x')$ 表示 α 的基点, 即 $\alpha \in T_x(\Omega)$. 已知 $L|_{\mathcal{S}_\Omega}$ 具有非正曲率, 因此, 根据 Finsler 刚性定理, 度量 $e(\mathcal{F})$ 在 $\pi : P \to \Delta$ 的纤维上为常数, 并且前述验证 ($\sharp$) 的论证同样适用, 从而导出 $\varphi = \log\|\widetilde{\alpha}(x_1, z')\|_s$ 在 $\{x_1\} \times P'$ 上为一常数, 因此根据引理 20.2.3 必然有

$$
0 = \mathrm{e}^{\varphi}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\varphi \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u_\theta}\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}u_\theta \mathrm{d}\theta,
$$

其中 $u_\theta = \log\|\widetilde{\alpha}_\theta(x_1, z')\|_{\mathrm{d}s^2_\Delta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, 由此对任意 $\theta \in [0, 2\pi), \sqrt{-1}\partial\overline{\partial}u_\theta = 0$. 由于 $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}u_\theta = s_\theta^*\omega_\Delta + 2\pi[Z(s_\theta)] \geqslant s_\theta^*\omega_\Delta$, 其中 $[Z(s_\theta)]$ 是 s_θ 的零除子, 因此, 所有的 s_θ 必然是常值函数, 即当 y_1 在 Poincaré 测地圆 $\partial B(y_1; \epsilon)$ 时 $s_{y_1}(z') := s(y_1, z')$ 必然是常数, 由此按恒等定理 $s(z_1, z')$ 与 z' 无关, 即 $s(z) = s(z_1, z') = s(z_1), s_0 : \Delta \to \Delta$, 定理证毕.

凭着命题 20.2.1 ($\sharp\sharp$) 得以验证. 要完成定理 20.2.2 的证明, 还必须验证 ($\flat\flat$), 即寻找 $\sigma \in \mathcal{F}$ 使得 $\sigma(z_1, z') = \sigma_0(z_1)$ 并且 σ_0 是入射的. 此处, 我们从命题 20.2.1 出发, 从 $s \in \mathcal{F}$ 构造出 σ. 首先可以取 $x_1 = 0$ 并取 $\epsilon > 0$ 充分小使得 $\lambda := s_0'(0) \neq 0$, 并从积分公式 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}s(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1)\mathrm{d}\theta = \lambda z_1$ 得出 s_0 在 0 点的线性部分. 积分公式可以写成 $s(z_1, z') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}s(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1, z')\mathrm{d}\theta$. P 的自同构的单位连通区 $\mathrm{Aut}_0(P) \cong \big(\mathrm{Aut}(\Delta)\big)^r$ 可自然地体现为 $\mathrm{Aut}_0(\Omega) := G$ 的闭李子群, 即有单一群同态 $\Phi : \mathrm{Aut}_0(P) \hookrightarrow G$. 往下以 $\rho_\theta \in \mathrm{Aut}_0(P)$ 标记由 $\rho_\theta(z_1, z') = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_1, z'\right), \theta \in \mathbb{R}$,

所定义的自同构, 并以 $\tau_\theta = \Phi(\rho_\theta)$ 表示 $\rho_\theta \in \mathrm{Aut}_0(P)$ 由 P 至 Ω 的延拓. 由此根据积分公式从 $s \circ \tau_\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, 某些线性组合的极限取得全纯函数 $\sigma, \sigma|_P$ 满足 $\sigma(z_1, z') = \sigma_0(z_1), \sigma_0'(z_1) = \lambda \neq 0$. 此论证的困难在于如何证明 $\sigma \in \mathcal{F}$. 由于 $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ 是闭集合, 仅需证明可以选择延拓 $\tau_\theta \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ 使得 $s \circ \tau_\theta \in \mathcal{F}$. 然而从 $\mathcal{F}$ 的定义出发, 仅能确知对任意 $\gamma \in \Gamma$, 恒有 $s \circ \gamma \in \mathcal{F}$. 由于 $s(z_1, z') = s_0(z_1)$, 存在有非紧闭子群 $H \subset G$ 使得对任意 $\eta \in H, s \circ \eta|_P \equiv s|_P$. 此处 $\eta \in H$ 当且仅当 $\eta(P) = P$, 并且 $\eta(z_1, z') = (z_1, \eta'(z')), \eta' \in \mathrm{Aut}(P')$. 下述结果让取平均值的论证得以成立 (参考文献 [11], (2.4), Lemma 3, 第 226 页).

引理 20.2.4 设 $\theta \in [0, 2\pi)$, 并假设存在有 $\gamma_i \in \Gamma$ 使得 $\gamma_i H$ 收敛于 $\tau_{-\theta} H \in G/H$. 那么, $s \circ \gamma_i^{-1}\Big|_P$ 收敛于 $s \circ \tau_\theta$, 即 $s(\gamma_i^{-1}(z_1; z'))$ 在 P 的紧致子集合上均匀收敛于 $s(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_i, z)$.

现在可以完成定理 20.2.2(嵌入定理) 的证明. 根据 Moore 遍历定理, Γ 在 G/H 的作用是遍历的, 由此按推理 20.2.1 存在一个零测度的例外集合 $E \subset G$, 使得对任意 $\xi \in G - E_0$, 存在有序列 $\gamma_i \in \Gamma$ 使得 $\gamma_i H$ 收敛于 ξH, 由此可以推论存在一个零测度的例外集合 $E_0 \subset G$, 使得对任意 $\zeta \in G - E$, 并对除了在一个零测度的集合 A_ζ (与 ζ 有关) 上的 $\theta \in [0, 2\pi)$ 以外, 都存在序列 $\gamma_i = \gamma_{i,\theta}$ 使得 $\gamma_i H$ 收敛于 $\tau_{-\theta}\zeta H$. 以 P_ζ 表示 $\zeta(P), H_\zeta$ 表示 $\zeta H \zeta^{-1}$, 那么若 $\zeta \notin E$ 前述方法应用在 P_ζ 与 H_ζ 可以得出满足 ($\sharp\sharp$) 与 ($\flat\flat$) 的有界全纯函数 $\sigma \in \mathcal{F}$, 其中以 P_ζ 的欧几里得坐标恒有 $\sigma(z_1, z') = \sigma_0(z_n), \sigma_0(z_1) = \lambda z_1, \lambda \neq 0$. 要证明 $F : \Omega \to D$ 是全纯嵌入必须对所有极大多圆柱进行论证, 因此, 需要证明对例外的极大多圆柱 P_ζ (即 $\zeta \in E$) 也存在同样的有界全纯函数 $\sigma \in \mathcal{F}$. 应用 Finsler 刚性定理, 当 $\zeta \notin E$ 均可取同一个 $\lambda \neq 0$. 因此, 对于例外的 P_ζ 可以通过非例外极大多圆柱的逼近而取得同样满足条件 ($\sharp\sharp$) 与 ($\flat\flat$) 的函数 $\sigma \in \mathcal{F}$, 由此完满地给出嵌入定理的证明.

嵌入定理 20.2.2 可以推广至秩 $\geqslant 2$ 有界对称域 Ω 为可约而格点子群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为不可约的情形 (参考文献 [19], Theorem 1$'$), 并且定理还适用于非光滑的靶空间. 应用在逆紧满射全纯映射 $f : X \to Z$ 并使用 Margulis[14] 关于格点子群 $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 正规子群的结果, 可以得出以下定理.

定理 20.2.3 设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 有界对称域, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ 为不可约无挠格点子群. 设 Z 为正规复空间, $f : X \to Z$ 为逆紧满射全纯映射. 那么, 除非 Z 的基本群 $\pi_1(Z)$ 是有限的, 否则 $f : X \to Z$ 必然为无分歧覆盖映射.

20.3 有界全纯函数的边界值与逆紧全纯映射的刚性问题

关于单位圆盘 Δ 上有界全纯函数存在一套经典的边界值理论. 最基础的边界值定理为以下的 Fatou 引理 (参考文献 [20]).

引理 20.3.1 设 f 为单位圆盘 Δ 上有界全纯函数. 那么, 存在有 Lebesgue 测度为零的子集合 $E \subset [0, 2\pi)$, 使得对应于任意 $\theta \in [0, 2\pi) - E$, $\lim\limits_{r \to 1} := f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 存在, 称为 f 在点 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 上的径向极限. 再者, 在单位圆 $\partial\Delta$ 上若以 $f^*(\zeta), \zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 标记上述几乎处处定义的边界值函数, 则对任意 $z \in \Delta$ 恒有 Cauchy 积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial\Delta} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

应该指出, Fatou 引理的更根本形式适用于有界调和函数 u, 其中 Cauchy 积分公式由牵涉 Poisson 核 $P(z; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 的积分公式 $u(z) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} P(z; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) u^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta$ 所取代. 在应用 Fatou 引理的时候, 往往需要更强的收敛性质. 往下以 $d(\cdot, \cdot)$ 标记单位圆盘 Δ 上的 Poincaré 度量的距离函数. 设 $\theta \in [0, 2\pi)$, 我们说序列 $z_i \in \Delta$ 非切向收敛于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 当且仅当存在有序列 $r_i, 0 < r_i < 1, \lim\limits_{i \to \infty} r_i = 1$, 使得 $d(z_i, r_i \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) < A$. 那么, 存在有零 Lebesgue 测度的子集合 $E' \subset [0, 2\pi)$, 使得对任意非切向收敛于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的序列 $z_i \in \Delta$, 序列 $f(z_i)$ 均为收敛的. 显然, $f(z_i)$ 的极限与序列 (z_i) 的选取无关, 并且必然等于径向极限. 往后将以 $f^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 标记上述更强收敛概念下的极限, 称为非切向极限.

在任意有界对称域 Ω 上存在有一套关于有界调和函数的边界值理论. 此处调和函数指的是满足 Poisson 方程 $\Delta u = 0$ 的两次连续可微函数, 其中 Δ 是伴随 Ω 上 Bergman 度量 $\mathrm{d}s^2_\Omega$ 的 Laplace-Beltrami 算子 (参考文献 [21]). 对 Ω 上的有界多调和函数 (此概念与 Kähler 度量的选取无关) u 而言, u 的 Poisson 积分表示可以通过 Shilov 边界上某种非切向边界值 u^* 得以体现, 例如多圆柱 Δ^n 上的有界多调和函数的 Poisson 积分表示可以通过 Poisson 核 $P(z; \zeta)$ 得以体现, 其中 $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \Delta^n$, $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in (\partial\Delta)^n$, 并且 $P(z; \zeta) := P(z_1; \zeta_1) \cdots P(z_n; \zeta_n)$; $P(z_i; \zeta_i)$ 为单位圆盘上的 Poisson 核. 环面 $(\partial\Delta)^n \cong (S^1)^n$ 称为多圆柱 Δ^n 的特异边界, 也就是 Δ^n 的 Shilov 边界. 一般而言, 若通过 Harish-Chandra 嵌入把有界对称域 Ω 体现为有界域, 那么 $\partial\Omega$ 可分解为互不相交 (non-intersecting) 的复流形, 称为边界面 (boundary component, 参考文献 [22]), 而 $\mathrm{Sh}(\Omega)$ 等同于零维边界面的并集. 若固定有界对称域 Ω 上的有界多调和函数 u, 对几乎所有的边界面 Π 而言, u 在 $\mathrm{Sh}(\Omega)$ 上的边界值 u^* 可以限制在 Π 的边界 $\partial\Pi$ 上, 由此通过 Poisson 积分公式给出 u 在 Π 上某种意义下的边界值, 从而得出牵涉高维边界面的 Fatou 引理与伴随的 Poisson 积分表示公式 (参考文献 [23]).

莫毅明与蔡宜洵在文献 [9] 里应用了有界全纯函数论的边界值理论去研究有界对称域上的刚性问题. 文章证明了秩大于等于 2 不可约有界对称域 Ω 的有界凸体现的唯一性定理, 即任意全纯有界凸体现 $F : \Omega \cong D \Subset \mathbb{C}^N$ 仅差一仿射影

射均为 Harish-Chandra 嵌入, 而证明的起点恰恰是对 F 在 Ω 上某些全测地复子流形上的边界值的研究. 这个方法再度被蔡宜洵 [8] 应用在 Ω 上逆紧全纯映射的问题上. 应该指出, 上述问题与第 20.2 节所讨论的关于度量与全纯映射的问题有着明显的联系. 事实上, 有界对称域的紧致商流形之间的全纯映射 $f : X \to X'$ 在 $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X')$ 为入射的前提下提升到万有覆盖空间上的逆紧全纯映射 $F : \Omega \to \Omega'$. 莫毅明在文献 [7] 中提出了关于有界对称域之间的逆紧全纯映射的刚性性质的猜想, 而蔡宜洵于 1993 年验证了此猜想 [8], 详述如下.

定理 20.3.1[8] 设 Ω 为秩 $r \geqslant 2$ 的不可约有界对称域, Ω 为秩等于 r' 的有界对称域. 设 $r' \leqslant r$, 并设 $F : \Omega \to \Omega'$ 为逆紧全纯映射. 那么, $r' = r$, 并且 $F : \Omega \to \Omega'$ 为全测地嵌入.

定理 20.3.1 的证明的起点在于运用有界全纯函数的边界值理论去分析逆紧全纯映射的微分性质. 最近, 莫毅明 [24] 把边界值理论与有关 Fano 流形的 VMRT 几何理论 (参考第 20.4 节与第 20.5 节) 联系起来, 给出一个独立于 Kähler 几何的证明方法 (参考第 20.6 节). 另外, 有界全纯函数的边界值理论也可以应用在与第 20.2 节所讨论的嵌入定理 20.2.2 相关的研究范畴上, 从而得出更强的结果 (参考文献 [25]). 在此节我们将着重介绍边界值理论在逆紧全纯映射上的应用, 并提示非切向极限与嵌入定理的关系.

以第一类典型域 $D(p,q)$ 为例, 考虑逆紧全纯映射 $f : D(p,q) \to D(p',q')$, 其中 $D(p,q)$ 由满足 $I - Z\overline{Z}^{\mathrm{T}} > 0$ 的复 $(p \times q)$ 矩阵 Z 所组成, 并且 $r := \min(p,q) \geqslant \min(p',q') := r'$, 即 $D(p,q)$ 的秩等于 $r, D(p',q')$ 的秩等于 r', 并且 $r' \leqslant r$. 设 α 为 $D(p,q)$ 上非零极小特征矢量, $\alpha \in T_x(\Omega)$. 若把 $D(p,q)$ 视为由复 $(p \times q)$ 矩阵 $M(p,q)$ 所组成的复欧几里得矢量空间的开集, 并把切从 $T_{D(p,q)}$ 透过 $M(p,q)$ 的欧几里得坐标视为等同于 $D(p,q) \times M(p,q)$, 那么, 任意矢量 $\eta \in T_x(\Omega)$ 为非零极小特征矢量当且仅当作为 $(p \times q)$ 矩阵 $\eta \in M(p,q)$ 的秩等于 1. 任意 $x \in D(p,q)$ 均可透过 $\mathrm{Aut}(D(p,q))$ 的传递作用被视为等价于原点 $0 \in D(p,q)$, 而非零极小特征矢量 $\alpha \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$ 均可在 0 点的迷向子群的作用下被视为等价于 $\lambda\dfrac{\partial}{\partial z_{11}}$, 其中 $\lambda \neq 0$, $(z_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q}$ 为 $(p \times q)$ 矩阵 Z 的系数. 那么, 显然 $D(p,q)$ 包含了 (全测地) 闭复子流形 $\Delta \times D(p-1,q-1)$. 若以 $(z_1,z'), z_1 \in \Delta, z' \in D(p-1,q-1)$ 标记 $\Delta \times D(p-1,q-1)$ 的点, 则得出逆紧全纯映射 $F|_{\Delta \times D(p-1,q-1)} : \Delta \times D(p-1,q-1) \to D(p',q')$. 单位圆盘 Δ 上的 Fatou 引理蕴涵了以下关于乘积区域 $\Delta \times D$ 简易的推广.

引理 20.3.2 设 $D \subset \mathbb{C}^N$ 为欧几里得空间上的区域, $h : \Delta \times D \to \mathbb{C}$ 为有界全纯函数. 那么, 存在有零测度的子集 $E \subset [0, 2\pi)$, 使得对于任意 $\theta \in [0, 2\pi) - E$, 存在满足下列性质的有界全纯函数 $h^*_\zeta : D \to \mathbb{C}, \zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 设 $z_i \in D$ 为任意非切向收

敛于 $\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的序列, 并以 $h_i: D\to\mathbb{C}$ 标记函数 $h(z_i,\cdot)$, 那么, h_i 必然在紧致子集上收敛于 h^*_ζ. 再者, 对任意 $(z,w)\in\Delta\times D$ 恒有

$$h(z,w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Delta}h^*(\zeta,w)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z},$$

其中 $h^*(\zeta,w):=h^*_\zeta(w)$.

证明　引理证明可以从单位圆盘的 Fatou 引理与相对于变数 w 的 Cauchy 估计诱导出来. 设 (w_k) 为 D 上稠密序列. 根据单位圆盘上的 Fatou 引理存在有零测度的例外子集 $E_k\subset[0,2\pi)$, 使得对任意 $\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\theta\in[0,2\pi)-E$, 恒有边界值 $h^*_{\zeta,k}$ 让以下的命题成立: 若 $z_i\in\Delta$ 为任意非切向收敛于 $\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的序列, 则 $h(z_i,w_k)$ 必然收敛于 $h^*_{\zeta,k}$. 定义 $E:=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$. 当 $\theta\notin E$ 时, 定义 $h^*_\zeta(w_k):=h^*_{\zeta,k}$. 设 $w\in D$ 为任意点并取 $\epsilon>0$ 使得欧几里得球 $B(w,\epsilon)\Subset D$. 应用相对于变数 $w=(w_i,\cdots,w_n)$ 的 Cauchy 估计, 当 $w_k\in B(w,\epsilon)$ 时恒有 $|h(z,w)-h(z,w_k)|\leqslant C\|w-w_k\|$, 其中常数 C 与 k 及 $z\in\Delta$ 无关, 由此容易证明 $(h(z_i,w))$ 必然是 Cauchy 序列. 上述序列的极限明显与非切向收敛于 ζ 的序列 (z_i) 的选取无关. 若以 $h^*_\zeta(w)$ 标记此极限, 从 Montel 定理与相对于变数 w 的 Cauchy 估计得知 $h^*_\zeta: D\to\mathbb{C}$ 为 (有界) 全纯函数. Cauchy 积分公式源自单位圆盘的 Fatou 引理, 由此引理证毕.

回到逆紧全纯映射 $F: D(p,q)\to D(p',q')$, 并考虑限制映射 $F|_{\Delta\times D(p-1,q-1)}:\Delta\times D(p-1,q-1)\to D(p',q')$, $F(z,z')=(f_{k\ell}(z,z'))_{1\leqslant k\leqslant p',1\leqslant\ell\leqslant q'}$. 往下以 F 标记此限制映射. 应用引理 20.3.2, 对几乎所有 $\zeta\in\partial\Delta$, 存在有非切向极限 $F^*_\zeta(z')$. 由于 $F^*_\zeta: D(p-1,q-1)\to M(p',q')\cong\mathbb{C}^{p',q'}$ 是序列 $F^*_{z_i}=F(z_i,\cdot): D(p-1,q-1)\to D(p',q')$ 的极限而 F 是逆紧映射, 显然 $F^*_\zeta: D(p-1,q-1)\to\partial D(p',q')$. 由此 F^*_ζ 的影像必然落在 $D(p',q')$ 的某一边界面 $\varPi_\zeta$ 上. 设 $\beta_0\in T_0(D(p-1,q-1))$, 并以 β 标记在 $M(p,q)$ 上的常值矢量 $\beta(0)=\beta_0$. 那么, $\partial_\beta f_{k\ell}:=f_{k\ell,\beta}$ 按 Cauchy 估计为有界全纯映射. 对几乎所有的 $\zeta\in\partial\Delta$ 存在有 $f_{k\ell,\beta}(\cdot,z')$ 的非切向极限 $f^*_{k\ell,\beta,\zeta}(z')$. 由于 $F^*_\zeta: D(p-1,q-1)\to\varPi_\zeta$, 矩阵 $\left(f^*_{k\ell,\beta,\zeta}(z')\right)_{1\leqslant k\leqslant p',1\leqslant\ell\leqslant q'}$ 必然取值于切空间 $T_{F^*_\zeta(z')}(\varPi_\zeta)$. 在 $\partial D(p',q')$ 典型的秩等于 s 的边界面 $\varPsi_s$ 是 $\left\{\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_a}\right)\right\}\times D(p'-a,q'-a)$, 其中 $\theta_1,\cdots,\theta_a\in[0,2\pi),1\leqslant a\leqslant r'=\min(p',q'),s=r'-a$, 而任意秩等于 s 的边界面 $\varPi$ 必然在 $U(p')\times U(q')$ 的典范作用下等价于 $\varPsi_s$, 由此任意矢量 $\eta\in T_{F^*_\zeta(z')}(\varPi_\zeta)$ 均为秩 $\leqslant r'-1$ 的矩阵. 一个矩阵 $A\in M(p',q')$ 的秩可以透过子行列式的运算得以判定, 例如, $h^*_\zeta:=f^*_{11,\beta,\zeta}(z')f^*_{22,\beta,\zeta}(z')-f^*_{12,\beta,\zeta}(z')f^*_{21,\beta,\zeta}(z')$ 为 $\left(f^*_{k\ell,\beta,\zeta}(z')\right)_{1\leqslant k\leqslant p',1\leqslant\ell\leqslant q'}$ 的一个 (2×2) 子行列式. 按 h^*_ζ 的定义, 显然 h^*_ζ 是有界全纯函数 $h(z,\cdot):=\partial_\beta f_{11}(z,\cdot)\partial_\beta f_{22}(z,\cdot)-\partial_\beta f_{12}(z,\cdot)\partial_\beta f_{21}(z,\cdot): D(p-1,q-1)\to\mathbb{C}$ 的非切向边界值. 上述描述适用于任意子行列式的运算, 往下以同样符号 $h(z,\cdot)$ 与 h^*_ζ 更一般地标记由 $\partial_\beta F$ 的任意子行列式所定义的有界全纯函数与其在 $\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\partial\Delta$

的非切向极限. 当子行列式的秩等于 r' 时已知 h^*_ζ 必然等于零, 因此, 根据引理 20.3.2 中的 Cauchy 积分表示公式, 有界全纯函数 $h(z,z')$ 也恒等于零. 由此得出以下的结论：设 $x\in\Omega$ 为任意点, $\xi\in T_x(\Omega)$ 为秩 $\leqslant r-1$ 的矩阵. 那么, $\mathrm{d}f(\xi)$ 必然被体现为秩 $\leqslant r'-1$ 的矩阵. 特别当 $r=2$ 时并且 $r'\leqslant r=2$, 必然有 $r'=2$, 并且对任意极小特征矢量 $\xi\in\widetilde{\mathcal{S}}_x$ 必然有 $\mathrm{d}F(\xi)\in\widetilde{\mathcal{S}}_{F(x)}\cup\{0\}$. 由于 $F:\Omega\to\Omega'$ 为逆紧映射, 对任意点 $x'\in\Omega', F^{-1}(x')\subset\Omega$ 必然为紧致子簇, 故此必然为有限集合, 从而推论 F 在一般点 $x\in\Omega$ 的邻域是浸入映射, 由此 $\mathrm{d}f_x(\widetilde{\mathcal{S}}_x)\subset\widetilde{\mathcal{S}}_{F(x)}$. 一般而言, 可以透过归纳法的论证得出以下的事实.

引理 20.3.3　设 Ω 为秩等于 $r\geqslant 2$ 不可约有界对称域, Ω' 为任意秩等于 $r'\leqslant r$ 的有界对称域. 那么存在有解析子簇 $A\subset\Omega$ (A 可能是空集), 使得对于任意点 $x\in\Omega-A$, 恒有 $\mathrm{d}F_x(\widetilde{\mathcal{S}}_x)\subset\widetilde{\mathcal{S}}_{F(x)}$.

此处归纳法的应用牵涉到一些新的几何观念, 简述如下. 沿用前述论证所使用的标记符号, 得知对几乎所有 $\zeta\in\partial\Delta, F^*_\zeta$ 可以定义, 并且恒有 $F^*_\zeta(D(p-1,q-1))\subset\Pi_\zeta\subset\partial D(p',q')$, 其中 Π_ζ 为 $D(p',q')$ 的某秩等于 $s\leqslant r'-1$ 的边界面. 边界面 $\Pi_\zeta\subset\partial D(p',q')$ 必然是线性空间 $M(p',q')$ 的仿射空间的开集, 并且 Π_ζ 与 $D(p'-a,q'-a)\subset M(p'-a,q'-a)$ 双全纯同构. 运用引理 20.3.2 和前述关于边界值的论证, 可以证明对任意 $x\in\Delta, F(\{x\}\times D(p-1,q-1))$ 必然落入某 $(p'-a)(q'-a)$ 维的仿射子空间里. 再者, 对任意 $\varphi\in\mathrm{Aut}\,(\Omega')$, 同样的论证适用于 $\varphi\circ F$. 简而言之, $F(\{x\}\times D(p-1,q-1))$ 所生成的极小仿射子空间 $V_{F(x)}\subset M(p,q')$ 有着非常特殊的性质: $V_{F(x)}$ 在任意 $\varphi\in\mathrm{Aut}\,(\Omega')$ 的作用依旧为仿射子空间. 利用上述特殊性质, 可以刻画此类仿射子空间和它们与区域 Ω' 的交集, 从而得出 $F(\{x\}\times D(p-1,q-1))$ 必然落在 Ω' 的某秩等于 s 的 "特征子流形" Z 上, 即存在有 $\psi\in\mathrm{Aut}\,(\Omega')$ 使得 $Z=\psi(Z_0), Z_0:=\{0\}\times D(p'-a,q'-a)$. 由此

$$F|_{\{x\}\times D(p-1,q-1)}:\{x\}\times D(p-1,q-1)\to Z\cong D(p'-a,q'-a)$$

为逆紧全纯映射, 其中 $\mathrm{rank}\,(D(p-1,q-1))=r-1, \mathrm{rank}\,(D(p'-a,q'-a))=s\leqslant r'-1\leqslant r-1$, 然后引理 20.3.3 通过归纳法得以证明.

引理 20.3.3 给出 $F:D(p,q)\to D(p',q')$ 一个重要的局部几何性质, 即在一般点 $x\in D(p,q)$ 上 F 保存极小特征簇, $[\mathrm{d}f](\mathcal{S}_x)\subset\mathcal{S}'_{F(x)}$. 容易证明 (参考文献 [24]), 要不然 $[\mathrm{d}f](\mathcal{S}_x)\subset\mathbb{P}T_{F(x)}(\Omega')$ 上为 $\mathcal{S}'_{F(x)}$ 的某线性截面, 即 $[\mathrm{d}f](\mathcal{S}_x)=\mathcal{S}'_{F(x)}\cap[\mathrm{d}F](T_x(\Omega))]$, 要不然 $F(D(p,q))$ 必然落在 Grassmann 流形 $G(p',q')$ 的某个射影子空间里, 其中 $G(p',q')$ 为 $D(p',q')$ 的 Borel 扩充. 然而, 后者蕴涵了 $F(D(p,q))$ 必然落在 $D(p',q')$ 的某个全测地的超球 B 里. 因为超球 B 的边界面均为零维的, 所以 F^*_ζ 均为常值函数, 故此对任意 $x\in\Delta, F|_{\{x\}\times D(p-1,q-1)}$ 也必然是常值函数, 显然与 F 为逆紧函数的假设相矛盾. 往下在第 20.4 节将介绍包括 Grassmann 流形的

紧型不可约 Hermite 对称空间 S 上的几何结构理论, 在第 20.5 节将介绍包括 S 的 Fano 流形或更一般的单直纹射影流形上的极小有理曲线 (minimal rational curve) 与极小有理切线簇 (variety of minimal rational tangents), 而此等概念在 S 结构的情况与极小圆盘及在第 20.2 节里定义的极小特征丛的概念是相关的, 在第 20.6 节将介绍如何运用引理 20.3.3 与其类推结果及极小有理切线簇的理论进行解析延拓的论证, 从而得出定理 20.3.1 在一个典型的例子里 (即关于第一类典型域的情形) 的新的证明. 运用此类方法可以得出定理 20.3.1 一个完全不牵涉 Kähler 度量的证明.

备注 (1) 不可约有界对称域 Ω 及其扩充空间 S (即与其对偶的紧型不可约 Hermite 对称空间) 上特征子流形 (characteristic submanifold) 的概念, 可以参考 Mok-Tsai[9]. 在扩充空间 S 存在有与此相关的概念, 称为恒全测地子流形 (invariantly totally geodesic submanifold), 指的是 S 上相对于任意 Kähler-Einstein 度量均为全测地的复子流形. 关于后者可以参考文献 [8].

备注 (2) 蔡宜洵 [8] 的结果在 Ω 等同于 Ω' 的特殊情况早在 Henkin-Novikov[26] 被证明, 证明运用函数论的方法, 并牵涉逆紧全纯映射在 Shilov 边界 $\mathrm{Sh}(\Omega)$ 上的边界值. 假如保持 Ω 不可约并且秩大于等于 2 的假设但允许 $\mathrm{rank}\,(\Omega') = r' > r = \mathrm{rank}\,(\Omega)$, 逆紧全纯映射 $F : \Omega \to \Omega'$ 在某些特殊的情况仍可能必然是全测地映射. 涂振汉 [27] 证明了当 $p \geqslant 3$ 时, 任意逆紧全纯映射 $F : D(p, p-1) \to D(p, p)$ 必然是全测地映射; 其证明运用了 Kähler 几何以及文献 [8] 中定义的恒全测地子流形的概念, 并首次把 (将在第 20.6 节里介绍的) 非同维 Cartan-Fubini 解析延拓的办法应用在逆紧全纯映射的课题上. 涂振汉 [27] 同时诱导出逆紧全纯映射 $F : D(p-1, p+1) \to D(p, p), p \geqslant 3$ 的不存在性定理. 最近, 莫毅明 [28] 给出若干第一类典型域之间逆紧全纯映射的不存在性定理. 若把 $\mathrm{rank}\,(\Omega') - \mathrm{rank}\,(\Omega)$ 称为余秩 (co-rank), 则余秩可以任意大. 例如, 根据文献 [28] 的证明方法可得出逆紧全纯映射 $F : D(p-a, p+a) \to D(p, p)$ 的不存在性, 其中 $a = O(\sqrt{p})$. 涂振汉 [29] 也证明了当 Ω 与 Ω' 同维而 Ω 为不可约并且秩大于等于 2 时, 任意逆紧全纯映射 $F : \Omega \to \Omega'$ 也必然是双全纯同构. 另外, Tumanov[30] 也证明了关于同维 Siegel 第二类区域逆紧映射的刚性定理.

在前述关于定理 20.3.1 的论述中, 全纯函数边界值理论实际上仅仅牵涉乘积区域 $\Delta \times \Omega'$ 上的径向极限. 然而, 一般有界对称域上牵涉非零维边界面的某种非切向边界值定理 (Korányi[22]) 对全纯映射的理论有着更广泛的应用. 特别地, 透过上述的边界值定理可以重新得出有关秩大于等于 2 有界对称域与其不可约格点子群的嵌入定理 (即定理 20.2.2 与其推广) 一个函数论的证明, 并且得出更强的结论 (参考文献 [28]). 在此课题上运用 Moore 遍历理论按下述引理可以得出非切向收敛的序列, 使得 Fatou 引理能够派上用场.

引理 20.3.4 设 Ω 为秩 $\geqslant 2$ 有界对称域, $\Gamma \subset \mathrm{Aut}_0(\Omega) := G$ 为无挠不可

约格点子群, $X := \Omega/\Gamma$. 设 $P \subset \Omega$ 为极大多圆柱, $P \cong \Delta^r$, 并由此定义群单一自同态 $\mathrm{Aut}_0(\Delta^n) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_0(\Omega) = G$. 以 $H_0 \subset \mathrm{Aut}\,(\Delta)$ 标记由平延 (transection) $\psi_t(z) = \dfrac{z+t}{1+t_z}, -1 < t < 1$, 所组成的单参数群, 并以 H 表示 $\{\mathrm{id}_\Delta\} \times \mathrm{diag}\,(H_0^{r-1})$, 其中对角群 $\mathrm{diag}\,(H_0^{r-1}) \subset H_0^{r-1}$ 指的是由 $\{(\psi_t, \cdots, \psi_t)| -1 < t < 1\}$ 所组成的子群. 以 S^1 标记旋转群 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$, 并以 $\varphi_{t,\theta} \in S^1 \times \mathrm{diag}\,(H_0^{r-1}), \theta \in \mathbb{R}$ 表示群元素 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \psi_t, \cdots, \psi_t)$. 假设 $\Gamma H := \{\gamma H \in G/H : \gamma \in \Gamma\} \subset G/H$ 为稠密子集. 那么, 存在有 (或许是空的) 可数例外子集 $A \subset [0, 2\pi)$, 使得对任意 $\theta \in [0, 2\pi) - A$, 恒有序列 $\gamma_k \in \Gamma, t_k \in (-1, 1), \delta_k \in G$, 使得 $\gamma_k = \varphi_{t_k,\theta}\delta_k$ 并且 $|t_k|$ 收敛于 1 而 δ_k 收敛于单位元素 id_Ω.

要解释如何运用边界值证明第 20.2 节里的嵌入定理 (定理 20.2.2) 与其推广, 为简单起见我们在此仅考虑 Ω 为多圆柱的特殊情况. 设 $F : \Delta^n \to D \Subset \mathbb{C}^N$ 为 Γ 共变有界全纯映射, 即存在有群同态 $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Aut}(D)$ 使得对任意 $\gamma \in \Gamma$ 恒有 $F(\gamma(z)) = \Phi(\gamma)(F(z))$, 要证明 $F : \Delta^n \to D$ 为嵌入, 首先证明存在有 $h_1, \cdots, h_n \in \mathcal{H}(D)$, 序列 $\gamma_k \in \Gamma$, 使得 $(F \circ \gamma_k)^* h_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 在多圆柱 Δ^n 的紧致子集上均匀收敛于线性映射 $\lambda_i z_i$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为非零常数. 若以 s_i 表 $F^* h_i$, 则 $(F \circ \gamma_k)^* h_i = \gamma_k^* s_i$. 取 $s_i \in \mathcal{F} = F^*\mathcal{H}(D)$ 使得 $s_i(z_1, \cdots, z_n)$ 并非与 z_i 无关. 往下为方便起见取 $i = 1$ 并以 s 表示 s_1. 沿用引理 20.3.4 的标记符号, 可以假设 ΓH 在 G/H 上是稠密的. 在排除某可数例外子集 $A \subset [0, 2\pi)$ 以后, 对于 $\theta \in [0, 2\pi) - A$ 存在有 $\gamma_k = \varphi_{t_k,\theta}\delta_k \in \Gamma$, 由此 $\gamma_k^* s(z_1, \cdots, z_n) = s(\varphi_{t_k,\theta}(\delta_k(z)))$. 由于序列 (δ_k) 在 $\mathrm{Aut}\,(\Delta)$ 上是有界的并且 $|t_k|$ 收敛于 1, 取 (γ_k) 的子序列可以假设对任意 $z \in \Delta, \varphi_{t_k,\theta}(\delta_k(z))$ 非切向收敛于 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_1, 1, \cdots, 1)$ 或者 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_1, -1, \cdots, -1)$. 在往下的论证可以假设关于 Fatou 引理的非切向边界值 $s^*(z_1, 1, \cdots, 1) := \xi$ 与 $s^*(z_1, -1, \cdots, -1) := \zeta$ 均存在, 而且两个单复变全纯函数 ξ 与 ζ 在原点 0 的一阶导数均不等于零. 当 k 趋向无穷时, $s(\varphi_{t_k,\theta}(\delta_k(z))$ 必然收敛于边界值 $s^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_1, 1, \cdots, 1)$ 或 $s^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_1, -1, \cdots, -1)$. 往后仅需把第 20.3 节里利用遍历理论取平均值的办法稍做修改便可在 $\mathcal{F} = F^*\mathcal{H}(D)$ 中找到线性函数 $\sigma_1(z_1, \cdots, z_n) = \lambda_1 z_1$, 其中 $\lambda_1 \neq 0$. 由于存在有特殊函数 $\sigma_i \in \mathcal{F} = F^*\mathcal{H}(D) (1 \leqslant i \leqslant n)$, 使得在多圆柱 Δ^n 上恒有 $\sigma_i(z_1, \cdots, z_n) = \lambda_i z_i$, 其中 $\lambda_i \neq 0$, 显然存在 $Q = (q_1, \cdots, q_n)$, 其中 $q_1, \cdots, q_n \in \mathcal{H}(D)$, 使得对任意 $z \in \Delta^n$ 恒有 $(Q \circ F)(z_1, \cdots, z_n) = (\lambda_1 z_1, \cdots, \lambda_n z_n)$. 因此, $Q \circ F : \Delta^n \to \mathbb{C}^n$ 是开嵌入, 故此 $F : \Delta^n \to D$ 必然是 (全纯) 嵌入.

20.4　有界对称域的扩充空间上的几何结构

设 Ω 为一不可约有界对称域, S 为其对偶 Hermite 对称空间. S 为紧型不可约

Hermite 对称空间, 而 Ω 可透过 Borel 嵌入体现为 S 上的开集. 当 Ω 的秩 $\geqslant 2$ 时, S 拥有特殊的几何结构, 称为 S 结构. 后者可以透过全纯 G 结构的语言予以描述 (参考文献 [31]). 把 S 上的 S 结构限制在 Ω 上, 自然给出 Ω 上的 S 结构, 而此结构在 Ω 的自同构的作用下不变. 以下透过 Grassmann 结构与二次超曲面的例子介绍 S 结构的基本情况 (参考文献 [32]).

设 S 为秩 $\geqslant 2$ 的紧型不可约 Hermite 对称空间, g 为 S 上的 Kähler-Einstein 度量, G_c 为 (S,g) 的自同构群的单位连通区 (identity component), $K \subset G_c$ 为 $0 \in S$ 的迷向子群, 则 $S = G_c/K$, 而 S 拥有全纯 $K^{\mathbb{C}}$ 结构, 其中 $K^{\mathbb{C}}$ 为 K 的复化. 如果以 G 标记 S 作为复流形的自同构群的单位连通区, $P \subset G$ 标记 $0 \in S$ 的迷向子群, 则 $S = G/P$, 而 $K^{\mathbb{C}} \subset P$ 为抛物子群 $P \subset G$ 的一个 Levi 因子. 例如, Grassmann 流形 $G(p,q)$ 一方面作为 Hermite 对称空间一般以 $G(p,q) \cong \mathrm{SU}(p+q)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q)) \cong G_c/K$ 来表达, $G_c = \mathrm{SU}(p+q)/Z$, 其中 $Z \subset \mathrm{SU}(p+q)$ 标记后者的 (有限) 中心群, $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q))/Z$, 其中 $\mathrm{S}(\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q))$ 标记行列式等于 1 的子群 (往后如此类推); 另一方面, 作为齐次有理空间 S 等同于 G/P, 其中 $G = \mathrm{SL}(p+q,\mathbb{C})/Z$ 为 G_c 的复化, $P = K^{\mathbb{C}}\cdot M^-$, M^- 为抛物子群 $P \subset G$ 的幂幺根 (unipotent radical), 可视为由复 $(p\times q)$ 矩阵所组成并以加法为群运算的交换李群 $M(p,q)$, $K^{\mathbb{C}}$ 为 K 的复化, 等同于 $\mathrm{S}(\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(q,\mathbb{C}))/Z$.

以 W 表示一固定的 n 维复矢量空间. 设 N 为 n 维复流形. N 的全纯标架丛 (holomorphic frame bundle) $\pi : \mathcal{F}(N) \to N$ 指的是在 $x \in N$ 上纤维等于 $\mathrm{Isom}(W, T_x(N))$ 的全纯 $\mathrm{GL}(W)$ 主丛 (holomorphic principal bundle), 其中 $\mathrm{Isom}(\cdot,\cdot)$ 标记由复线性同构组成的集合. 设 $L \subset \mathrm{GL}(W)$ 为闭复线性子群. 我们说 N 拥有 L 结构, 指的是 N 的全纯标架丛 $\mathcal{F}(N)$ 可简约为 L, 也就是可以选择 $\mathcal{F}(N)$ 的局部全纯纤维坐标系统 (local holomorphic fiber coordinate system), 使得 $\mathcal{F}(N)$ 的转移函数均为取值于 L 的全纯矩阵函数. 换句话说, 在 N 上存在 L 结构当且仅当在全纯标架丛 $\pi : \mathcal{F}(N) \to N$ 上存在全纯 L 主子丛 $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}(N)$. 在上述例子 $S = G(p,q)$, $\min(p,q) \geqslant 2$. 我们说复流形 N 拥有 $G(p,q)$ 结构, 指的是全纯切丛 T_N 全纯等价于张量积 $A^{(p)} \otimes B^{(q)}$, 其中 $A^{(p)}$ 与 $B^{(q)}$ 依次为秩等于 p 与等于 q 的全纯矢量丛. 事实上, 如果以 $A^{(p)}$ 与 $B^{(q)}$ 的局部全纯纤维坐标系统诱导出张量积 $A^{(p)} \otimes B^{(q)} \cong T_N$ 的局部全纯纤维坐标系统, 以竖矢量表 $A^{(p)}$ 的元素, 以横矢量表 $B^{(q)}$ 的元素, $(p\times q)$ 矩阵表 $A^{(p)} \otimes B^{(q)}$ 的元素, 纤维坐标系统的转换等同于 $M(p,q)$ 上由左乘与右乘所定义的线性变换, 也就是转移函数取值于由可逆线性变换 $X \to EXF, E \in \mathrm{GL}(p,\mathbb{C}), F \in \mathrm{GL}(q,\mathbb{C})$ 所组成的闭复线性子群 $L \subset \mathrm{GL}(M(p,q))$. 换句话说, 如果 $\Phi : \mathrm{GL}(p,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(q,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(M(p,q)) \cong \mathrm{GL}(pq,\mathbb{C})$ 按公式 $\Phi(E,F)(X) = EX(F^t)^{-1}$ 定义, 则 Φ 为复李群之间的同态, 而 Φ 的影像为 $L \cong \mathrm{S}(\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(q,\mathbb{C}))/\mu_{p+q}I$, 其中 μ_{p+q} 表示有限循环群 $\{\lambda \in \mathbb{C}^* | \lambda^{p+q} = 1\}$.

L 恰恰是上一段落 $K^{\mathbb{C}} \subset P$ 透过映射 $\gamma \in K^{\mathbb{C}} \to \mathrm{d}\gamma(0)$ 所定义的影像 (在那里 Z 即 $\mu_{p+q}I$). 为叙述方便起见, 一般把 $K^{\mathbb{C}}$ 视为等同于 L.

任意秩大于等于 2 的紧型 Hermite 对称空间 $S = G_c/K$ 拥有特殊的 $K^{\mathbb{C}}$ 结构, 阐述如下. 一般而言, 当复流形 N 拥有全纯 L 结构 $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}(N)$ 时, 存在覆盖 N 的图册 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 使得对任意 $\alpha \in A$, $T_N|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$, 而转移函数取值于 L. 如果可以选择平凡化 $T_N|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ 使得 $T_N|_{U_\alpha}$ 的全纯纤维坐标系统均由 U_α 的全纯坐标系统诱导出来, 也就是说, $T_N|_{U_\alpha}$ 的纤维坐标系统 $(w_1^{(\alpha)}, \cdots, w_n^{(\alpha)})$ 对应于 $w_1^{(\alpha)}\dfrac{\partial}{\partial z_1^{(\alpha)}} + \cdots + w_n^{(\alpha)}\dfrac{\partial}{\partial z_n^{(\alpha)}}$, 那么 $\mathcal{L}$ 称为平坦的 L 结构 (flat L-structure) 或者可积的 L 结构 (integrable L-structure). 对 S 而言 $L = K^{\mathbb{C}}$, 并存在有透过 Harish-Chandra 分解而定义的一组双全纯等价于欧几里得空间 $\mathbb{C}^n$ 的开集 $\{U_\alpha\}$, 使得 U_α 的 Harish-Chandra 坐标系统之间的转移函数取值于 $K^{\mathbb{C}}$. 一般而言, 上述转移函数为 S 上自同构的 Jacobi 矩阵. 例如, 若以 Harish-Chandra 坐标把 Grassmann 流形 $G(p,q)$ 上的自同构 γ 写成 $\gamma(Z) = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$, 其中 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$, 并以 $(p\times q)$ 矩阵 X 表示 Harish-Chandra 坐标卡上的矢量, 则

$$\mathrm{d}\gamma(Z)(X) = AX(CZ+D)^{-1} - (AZ+B)(CZ+D)^{-1}CX(CZ+D)^{-1}$$

显然可以写成 $\mathrm{d}\gamma(Z)(X) = M(Z)XN(Z)$ 的形式. 换句话说, Jacobi 矩阵取值于上述的线性子群 $K^{\mathbb{C}} \subset \mathrm{GL}(W) \cong \mathrm{GL}(p+q,\mathbb{C})$.

一般而言, 秩大于等于 2 的紧型不可约 Hermite 对称空间 S 上的 S 结构 (即 $K^{\mathbb{C}}$ 结构) 为通过群表示或者微分几何所定义的一个概念. 然而, 这个 S 结构可以与有理曲线的理论联结起来. 以二次超曲面 $Q^n (n \geqslant 3)$ 为例, Q^n 结构即全纯保形结构 (holomorphic conformal structure). 更具体地, 复流形 N 拥有 Q^n 结构当且仅当存在覆盖 N 的图册 (atlas) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}, (z_i^\alpha) : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, 其中 (z_i^α) 表示 U_α 上的全纯坐标系统, 使得在 U_α 上存在全纯度量 $g^{(\alpha)} := \sum g_{ij}^\alpha \mathrm{d}z_i^\alpha \otimes \mathrm{d}z_j^\beta$, $g_{ij}^\alpha = g_{ji}^\alpha, \det(g_{ij}^\alpha)$ 恒不等于零, 并且在交集 $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ 上 $g^{(\alpha)}$ 与 $g^{(\beta)}$ 是保形的, 即 $g^{(\alpha)} = \lambda_{\alpha\beta} g^{(\beta)}$, $\lambda_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}^*)$. 在复流形 N 上的一个全纯保形结构等同于一个处处非退化的全纯同态 $\tau : S^2T_N \to E$, 其中 E 为 N 上的全纯线丛. 满足 $\tau(\eta,\eta) = 0$ 的任意矢量称为零矢量. 由所有零矢量组成的集合称为 (N,τ) 的零锥面 (null cone) $\widetilde{\mathcal{Q}} \subset T_N$. 根据黎曼几何一些基本论证的类推, 对任意全纯度量 g 可以定义唯一的与 g 相容的对称全纯联络 ∇, 由此定义测地线并证明其局部存在性与唯一性. 一般而言, 当一个全纯度量 g 被另一个保形全纯度量 $g' = \lambda g$ 所取代时, 测地线的集合会有所改变. 不过, 对任意非零的零矢量 $\eta \in T_x(N)$ 而言, 容易证明, 经过 x 并与 η

相切的测地线仅仅取决于全纯度量的保形等价类. 此类测地线称为零测地线.

在 Q^n 上存在由嵌入 $\iota : Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 所定义的射影二次基本形 $\sigma : S^2T_{Q^n} \to N_{Q^n|\mathbb{P}^{n+1}}$, 其中 $N_{Q^n|\mathbb{P}^{n+1}} \cong \mathcal{O}(2)$ 为 ι 的全纯法丛. 容易验证, (Q^n, σ) 上的零测地线恰恰是 $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 上极小有理曲线的连通非空开集.

20.5 VMRT 几何理论概说

设 X 为射影流形. 从 $\mathbb{P}^1$ 至 X 上的非常值全纯映射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ 称为参数化有理曲线 (parametrized rational curve). 若在所有参数化有理曲线所构成的集合 $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1; X)$ 上引进等价关系 $\sim$, 让 $f_1 \sim f_2$ 当且仅当存在 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 使得 $f_1 = f_2 \circ \varphi$, 则 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1; X)$ 的等价类 $[f]$ 称为 X 上的有理曲线 (rational curve).

X 称为单直纹射影流形, 当且仅当对 X 上任意点 x 均存在经过 x 的有理曲线. 任意单直纹射影流形 X 上存在以某射影簇 T 为参数空间的一族射影子簇 $\{Z_t\}_{t\in T}$, 使得 T 的一般点 t_0 对应于有理曲线 (而因此任意点 t 必然对应于由有限条有理曲线所组成的子簇), 并且 $\{Z_t\}_{t\in T}$ 覆盖 X, 即 $\bigcup\limits_{t\in T} Z_t = X$. 存在有射影子簇 $\mathcal{Z} \subset X \times T$, 使得投影 $\mathrm{pr}_T : \mathcal{Z} \to T$ 的纤维等同于 Z_t, 而投影 $\mathrm{pr}_X : \mathcal{Z} \to X$ 为满映射.

设 X 为 n 维射影流形, T_X 为其全纯切丛, 而 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ 为 X 上某参数化有理曲线. 全纯矢量丛 f^*T_X 按 Grothendieck 分解定理全纯等价于线丛的直和, $f^*T_X \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n)$, 其中 $a_i \in \mathbb{Z}$. 按照有理曲线的形变理论 (参考文献 [33]), 当 $H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X) = 0$, 即当所有 $a_i \geqslant -1$ 时, $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1; X)$ 为光滑点, 而其切空间 T_f (即由 f 的无穷小形变所构成的复矢量空间) 等同于 $H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$.

有理曲线 $[f]$ 称为自由有理曲线当且仅当 f^*T_X 为非负矢量丛, 即所有 $a_i \geqslant 0$. 显然, 由于 $\mathbb{P}^1$ 上的非负矢量丛可由整体全纯截面所生成, 当射影流形 X 上存在自由有理曲线时, 从后者的形变可得出覆盖 X 的一族由有理曲线所构成的射影子簇, 因此 X 为单直纹射影流形. 相反, 假设 X 为单直纹射影流形, $f_0 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1; X)$, 而由 f_0 的形变所产生的某一族射影子簇 $\{Z_t\}_{t\in T}$ 覆盖 X, 那么, 由于投影 $\mathrm{pr}_X : \mathcal{Z} \to X$ 为满映射, 容易证明在 f_0 的邻域存在有参数化有理曲线 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1; X)$ 使得全纯矢量丛 f^*T_X 为非负矢量丛. 换句话说, 射影流形 X 为单直纹射影流形当且仅当 X 上存在自由有理曲线. 按代数几何关于 Chow 概型的一般理论 (参考文献 [33]), 经过 X 上非常一般点 (very general point) 的任意射影直线均为自由有理曲线. 此处非常一般点指的是在最多是可数个不可约射影真子簇 $E_i \subsetneqq X$ 以外的点.

设 X 为单直纹射影流形, L 为 X 上正全纯线丛. 考虑在 $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1; X)$ 里所有

参数化自由有理曲线所组成的子集合 $\widetilde{\mathcal{H}}$. 按有理曲线的形变理论, 后者可被视为复流形, 并且 $T_f(\widetilde{\mathcal{H}}) = H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X)$. 设 $\mathcal{H}$ 为 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 的连通分支, 称为参数化有理分支, 而 $f \in \mathcal{H}$ 为任意成员. 由于 f^*L 的次数 $\deg(f^*L)$ 与 $f \in \mathcal{H}$ 的选择无关, 可以定义 $\deg_L(\mathcal{H}) = \deg(f^*L)$, 称为 H (相对于 L) 的次数. 若 $\deg_L(\mathcal{H}_0)$ 取所有 $\deg(f^*L)$ 中的极小值, 我们称 $\mathcal{H}_0$ 为极小参数化有理分支. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 按照规律 $(\varphi, f) \to f \circ \varphi$ 作用在 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 上, 而此作用显然是全纯的. 任意参数化有理分支 $\mathcal{H}$ 在此作用下不变, 而商空间 $\mathcal{H}/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) := \mathcal{K}$ 称为有理分支. 一般而言, $\mathcal{K}$ 自然拥有正规复空间的结构. 当 $\deg_L(\mathcal{H})$ 取极小值时, 对任意 $f \in \mathcal{H}$, $f: \mathbb{P}^1 \to f(\mathbb{P}^1)$ 均为入射的, 否则 $C := f(\mathbb{P}^1)$ 的正规化 $h: \mathbb{P}^1 \to C$ 满足 $\deg(h^*L) < \deg(f^*L)$, 与 $\mathcal{H}$ 的极小性质相矛盾. 因此 $f \circ \varphi = f$ 当且仅当 $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$. 换句话说, $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 在 $\mathcal{H}$ 的作用是 (全纯和) 有效的, 由此极小有理分支 $\mathcal{K} = \mathcal{H}/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 自然拥有复流形的结构. 透过代数几何的方法可以证明 $\mathcal{K}$ 双全纯同构于拟射影流形.

定义 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1; 0) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ 为 $0 \in \mathbb{P}^1$ 的迷向子群, 并且定义 $\mathcal{U} := \mathcal{H}/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1; 0)$. 那么, 自然映射 $\mathcal{U} = \mathcal{H}/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1; 0) \to \mathcal{H}/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \mathcal{K}$ 把 $\mathcal{U}$ 体现为复流形 $\mathcal{K}$ 上的全纯 $\mathbb{P}^1$ 丛, 称为 $(X, \mathcal{K})$ 的万有 $\mathbb{P}^1$ 丛. $\mathcal{U}$ 在 $\kappa = [f] \in \mathcal{K}$ 上的任意点 $u \in \rho^{-1}(\kappa)$ 源自参数化极小有理曲线 $f: \mathbb{P}^1 \to X$ 与由此参数化所确定的 $\mathbb{P}^1$ 上的某一点 ζ, 由此 u 给出 X 上的一点 $x := f(\zeta)$. 容易证明 $u \mapsto x$ 与 κ 的参数化的选择无关, 并且由 $\mu(u) = x$ 所定义的映射 $\mu: \mathcal{U} \to X$ 是全纯的, 称为取值映射 (evaluation map). 我们一般同时以 $\rho: \mathcal{U} \to \mathcal{K}$ 和 $\mu: \mathcal{U} \to X$ 表示 $(X, \mathcal{K})$ 上的万有 $\mathbb{P}^1$ 丛.

如果在单直纹射影流形 X 上固定了正全纯线丛 L, 显然存在 (相对于 L) 极小有理分支 $\mathcal{K}$. 当 X 的 Picard 数为 1 时, 极小有理分支的概念与 L 的选择无关. Picard 数为 1 的单直纹射影流形 X 的典范线丛 K_X 必然是负线丛, 因此, X 必然是 Fano 流形. 根据 Miyaoka-Mori[10] 的结果, 所有 Fano 流形必然是单直纹射影流形, 其中 Picard 数为 1 的 Fano 流形不能进一步按 Mori 理论加以简约. Jun-Muk Hwang 与作者所提出的 VMRT 几何理论首先是一套对 Picard 数为 1 的 Fano 流形作系统研究的方法, 由此解决了一系列代数几何领域里关于此类流形的难题, 包括 Lazarsfeld 问题 [34,35] 与 Picard 数为 1 的有理齐次空间 G/P 在代数几何意义下的形变刚性定理 (参考文献 [36]). 部分方法与结果适用于任意 Fano 流形甚至任意单直纹射影流形, 但对 Picard 数大于 1 的 Fano 流形上代数几何问题的应用有待发展. Picard 数为 1 的 Fano 流形的范例包括紧型不可约 Hermite 对称空间, 例如二次超曲面 (维数 $n \geqslant 3$) 与 Grassmann 流形, 推而广之包括由单复李群 G 与极大抛物子群 $P \subset G$ 所定义的有理齐次空间 G/P.

往下讨论一类特殊的 Picard 数为 1 的 Fano 流形. 设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 为一 Picard 数为 1 的射影流形. 假设 X 充满了射影直线 (projective line), 也就是 X 上存在一极小有理分支 $\mathcal{K}$, 其中任意成员 $\kappa \in \mathcal{K}$ 均为处于 X 上的射影直线. 在本节, X

将标记此类单直纹射影流形. 紧型不可约 Hermite 对称空间 S 以至一般的 Picard 数为 1 的有理齐次空间 G/P 均属此类流形. 例如二次超曲面 Q^n (维数 $n \geqslant 3$) 显然被射影直线所覆盖, Grassmann 流形 $G(p,q)$ 则可以透过 Plücker 嵌入体现为被射影直线所覆盖的流形. 另外, 容易证明, 当 $N \geqslant 4$ 时任意次数 (degree) 不大于 $N-1$ 的光滑射影超曲面 $Z \subset \mathbb{P}^N$ 必然充满了射影直线, 并且 Picard 数等于 1. 设 $\dim(X) = n$, $x \in X$ 为一般点, 即在某真子簇 $E \subsetneq X$ 以外的一点, $\ell \subset X \subset \mathbb{P}^N$ 为经过 x 的一条射影直线. 那么, $T_X|_\ell \geqslant 0$, 即 $T_X|_\ell = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n)$, 所有 $a_i \geqslant 0$. 同时, $T_\ell \subset T_X|_\ell \subset T_{\mathbb{P}^N}|_\ell \cong \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{N-1}$. 由于 $\mathbb{P}^1$ 上切丛 $T_{\mathbb{P}^1} \cong \mathcal{O}(2)$, 显然 $T_X|_\ell$ 包含了 $T_{\mathbb{P}^N}|_\ell \cong \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{N-1}$ 的 $\mathcal{O}(2)$ 因子, 从而推出 $T_X|_\ell \cong \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^p \oplus \mathcal{O}(q)$, $1+p+q = n, 2+p = c_1(X)$. 例如当 $X \subset \mathbb{P}^{Nn+1}$ 为超曲面, $\deg(X) = d \leqslant n$ 时, $T_X|_\ell \cong \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{n-d} \oplus \mathcal{O}^{d-1}$.

一般而言, 任意一个 n 维单直纹射影流形 X (即使是 Picard 数等于 1 的 Fano 流形) 未必充满了射影直线. 固定 X 上的某正全纯线丛, 并以 $\mathcal{H}$ 标记 X 上一个参数化极小有理分支, 以 $\mathcal{K}$ 标记相对应的极小有理分支. 我们考虑经过一般点 $x \in X$ 的 $\mathcal{K}$ 曲线, 即极小有理曲线 $[f]$, $f: \mathbb{P}^1 \to X$. 可以假设, 所有经过 x 的 $\mathcal{K}$ 曲线均为自由有理曲线, 由此 $f^*T_X \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n)$, 其中所有 $a_i \geqslant 0$. 往下讨论经过 x 的所有 $\mathcal{K}$ 曲线的模空间. 以 $\mathrm{Hom}((\mathbb{P}^1,0);(X;x))$ 标记所有有理曲线 $h: \mathbb{P}^1 \to X$, $h(0) = 0$. 根据有理曲线的形变理论, 在 $h(0) = x$ 的前提下 f 的无穷小形变空间为 $T_f^0 = \Gamma(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathfrak{m}_0)$, 其中 $\mathfrak{m}_0$ 表示 $0 \in \mathbb{P}^1$ 的理想层 (ideal sheaf), $\mathfrak{m}_0 \cong \mathcal{O}(-1)$, 因此 $T_f^0 = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(a_1-1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n-1))$, 其中所有 $a_i - 1 \geqslant -1$. f 在 $h(0) = x$ 的前提下形变的障碍 (obstruction) 是 $H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathfrak{m}_0)$. 由于当 $k \geqslant -1$ 时, $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k)) = 0$, 障碍群恒等于零, 由此 f 是 $\mathrm{Hom}((\mathbb{P}^1,0);(X;x))$ 的光滑点.

以 $\mathcal{H}_x^0$ 表示 $\mathrm{Hom}((\mathbb{P}^1,0);(X,x))$ 包含 f 的连通分支. $\mathcal{H}_x^0$ 为光滑的, 并且 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1,0)$ 有效地作用在 $\mathcal{H}_x^0$ 上. $\mathcal{K}_x := \mathcal{H}_x^0/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1,0)$ 为复流形. 容易证明, $\mathcal{H}_x^0$ 与 $\mathcal{H}_x := \{f \in \mathcal{H} | f(0) = x\}$ 双全纯同构, 因此取值映射 $\mu: \mathcal{U} \to X$ 在 $x \in X - E$ 上的纤维 $\mathcal{U}_x = \mathcal{H}_x/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1,0)$ 与 $\mathcal{K}_x$ 双全纯同构.

以充满射影直线的单直纹射影流形 $(X,\mathcal{K})$ 为例, $\mathcal{U}_x$ 描述所有经过一般点 $x \in X - E$ 的射影直线. 显然, 任意 (经过 x 的) 收敛的射影直线序列 $\{\ell_i\}$ 的极限仍然是 (经过 x 的) 射影直线 ℓ_∞, 因此 $\mathcal{U}_x$ 是紧致的. 每一条经过 x 的射影直线 ℓ 对应于 1 维复子空间 $T_x(\ell) \subset T_x(X)$. 如果以 $\tau_x(\ell) = [T_x(\ell)] \in \mathbb{P}T_x(X)$ 定义 $\tau_x: \mathcal{U}_x \to \mathbb{P}T_x(X)$, 并称之为切线映射, 那么, 切线映射 τ_x 为全纯和入射的. 换句话说, 如果以 $\mathcal{C}_x$ 表示影像 $\tau_x(\mathcal{U}_x) \subset \mathbb{P}T_x(X)$, 则 $\tau_x: \mathcal{U}_x \to \mathcal{C}_x$ 在集论的意义下为一一对应. $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_x(X)$ 称为极小有理切线簇 (variety of minimal rational tangents), 简称 VMRT. 以 $\widetilde{\mathcal{C}}_x \subset T_x(X)$ 标记 $\pi^{-1}(\widetilde{\mathcal{C}}_x)$, 其中 $\pi: T_x(X) - \{0\} \to \mathbb{P}T_x(X)$ 为

典范投影. 根据前述的一般性理论, $\mathcal{U}_x$ 为复流形. 设 $[\ell] \in \mathcal{K}$ 经过 $x \in X - E$, 切线映射 $\tau_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{P}T_x(X)$ 在点 $u := \rho^{-1}(\ell) \cap \mathcal{U}_x$ 上的微分 $\mathrm{d}\tau_x(u)$ 完全可以透过 $T_X|_\ell$ 的 Grothendieck 分解予以描写. 容易证明, 切线映射在 w 点为浸入, 即 $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\tau_x(u)) = 0$ 当且仅当 $T_X|_\ell \cong \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^p \oplus \mathcal{O}^q$, 即 ℓ 为标准有理曲线, 而后者已知对所有自由射影直线是成立的, 特别是对所有经过 $x \in X - E$ 的射影直线 ℓ 是成立的. 综合以上所述, 切线映射 $\tau_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{P}T_x(X)$ 为入射全纯浸入, 因此 $\tau_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{C}_x$ 为双全纯同构. 由于 $\mathcal{U}_x$ 是光滑的而 $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_x(X)$ 是射影子簇, $\mathcal{U}_x \cong \mathcal{C}_x$ 均为射影流形.

设 X 为单直纹射影流形, L 为 X 上的正全纯线丛, 并以 $\mathcal{H}$ 表 X 上相对于 X 的参数化极小有理分支, $\mathcal{K} = \mathcal{H}/\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1$ 表极小有理分支. 经过一般点 $x \in X$ 的所有次数不大于 $\deg_L(\mathcal{K})$ 的有理曲线必然是自由有理曲线, 因此所有经过 x 的 $\mathcal{K}$ 曲线构成一紧致拓扑空间 (简单地说经过 x 的 $\mathcal{K}$ 曲线不能裂开, 否则存在相对于 L 次数更小的自由有理曲线, 与 $\mathcal{K}$ 的极小性相矛盾.) 根据代数几何的 Chow 概型的理论可以诱导出 $\mathcal{U}_x$ 为射影流形.

运用 Mori[37] 关于有理曲线的 bend-and-break 论证, 经过一般点 $x \in X$ 的所有 $\mathcal{K}$ 曲线均为标准有理曲线. 换句话说, 所有 $f \in H_x$ 满足 $f^*T_X \cong \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^p \oplus \mathcal{O}^q$ (参考文献 [34, 38]). 当 $f \in \mathcal{H}$, $f(0) = x$ 为一般点, 而 f 在 0 点为全纯浸入时 (即 $\mathrm{d}f(0) \neq 0$), 如以 u 表 $\rho^{-1}([f]) \cap \mathcal{U}_x$ 对应于 $0 \in \mathbb{P}^1$, $f(0) = x$ 的点, 则 $\tau_x(u) = \mathrm{Im}(\mathrm{d}f(0)) \in \mathbb{P}T_x(X)$ 可以定义, 因此得出全纯映射 $\tau_x : \mathcal{U}_x^0 \to \mathbb{P}T_x(X)$, 其中 $\mathcal{U}_x^0 \subset \mathcal{U}_x$ 对应于所有在 $0 \in \mathbb{P}^1$ 为全纯浸入的 $f \in \mathcal{H}_x$. τ_x 可以延拓为在射影流形 $\mathcal{U}_x$ 上定义的亚纯映射, 即有理映射. 我们定义在 x 点的极小有理切线簇 $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_x(X)$ 为 $\tau_x : \mathcal{U}_x \subset \mathbb{P}T_x(X)$ 的全变换 (total transform), 即 $\mathcal{C}_x = \overline{\tau_x(\mathcal{U}_x^0)} \subset \mathbb{P}T_x$.

在所有已知的例子 $(X, \mathcal{K})$ 里, τ_x 均为全纯的, 并且 $\tau_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{C}_x$ 均为双全纯同构. 关于切线映射一般性质的研究有以下的发展. 对于一般点 $x \in X$, 在 $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_x(X)$ 的 Gauss 映射为一般地有限 (generically finite) 的前提下, Hwang-Mok[34] 证明了 $\tau_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{C}_x$ 是双有理变换 (birational transformation). Kebekus[39] 证明了经过一般点 $x \in X$ 的 $\mathcal{K}$ 曲线必然是全纯浸入的, 并由此证明 $\tau_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{P}T_x(X)$ 为有限全纯变换. Cho-Miyaoka-Shepherd-Barron[40] 证明了当 n 维单直纹射影流形 $(X, \mathcal{K})$ 在一般点 x 上的 VMRT $\mathcal{C}_x$ 等同于 $\mathbb{P}T_x(X)$ 时, X 必然双全纯等价于射影空间 $\mathbb{P}^n$. 把文献 [41] 的方法推广, 并与文献 [39] 和文献 [40] 的结果相结合, Hwang-Mok[35] 证明了以下的一般性定理.

定理 20.5.1 设 $(X, \mathcal{K})$ 为赋有极小有理分支的单直纹射影流形, $x \in X$ 为一般点, 并以 $\tau_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{P}T_x(X)$ 表示 $(X, \mathcal{K})$ 在 x 上的切线映射. 那么, τ_x 为全纯和有限的, 并且 $\tau_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{C}_x$ 为双有理映射, 即 τ_x 为 $\mathcal{C}_x$ 的正规化 (normalization).

VMRT 几何理论特别适用于 Picard 数为 1 的 Fano 流形. 首先我们着眼在如

何从 VMRT 的局部微分几何的性质过渡到流形的整体性质. 从应用出发我们考虑了在 Fano 流形的连通的开集上定义的全纯映射的解析延拓问题. 在几何结构的范畴里, 存在着由 Ochiai[31] 所证明的关于不可约和秩 $\geqslant 2$ 的紧型 Hermite 对称空间 S 的解析延拓定理. 以此类流形为范例, 我们发现了一个现象, 可以称为 Cartan-Fubini 延拓原则, 也就是任意保存 VMRT 的全纯的局部映射在除了一些可以列明的特殊情况以外必然可以解析延拓为双全纯映射. 更确切地我们证明了以下的定理.

定理 20.5.2(Hwang-Mok[42]) 设 X 为 Picard 数为 1 的 Fano 流形. 假设在 X 上存在某一极小有理分支 $\mathcal{K}$, 使得在一般点 $x \in X$ 的极小有理切线簇 $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}T_x(X)$ 并非由有限个射影子空间所组成. 那么, Cartan-Fubini 延拓原则在 $(X, \mathcal{K})$ 上成立. 换句话说, 对任意 Picard 数为 1 的 Fano 流形 X', 任意在 X 上的极小有理分支 $\mathcal{K}'$ 及由此定义的极小有理切线簇丛 $\mathcal{C}' \subset \mathbb{P}T(X')$, 任意非空连通开集合 $U \subset X$ 及 $U' \subset X'$, 与任意保存极小有理切线簇丛的双全纯映射 $f : U \to U'$, 即 $\mathrm{d}f(\widetilde{\mathcal{C}}_U) = \widetilde{\mathcal{C}}'_{U'}$, 必然存在双全纯映射 $F : X \to X'$, 使得 $F|_U \equiv f$.

往后上述定理将被称为 Cartan-Fubini 延拓定理. 此定理是 VMRT 理论许多应用的基础, 包括 Lazarsfeld 问题的解决 [34,35] 与全纯映射的局部刚性定理 [35,41]. 有关 VMRT 几何的一般理论, 读者可以参考文献 [42, 43] 与最近的莫毅明 [44] 几篇介绍性文章. 从复变函数论的角度出发, VMRT 几何理论与有界对称域的函数论有着密切的关系. 任意有界对称域 Ω 都可以透过 Borel 嵌入被视为其对偶空间 S 的开集, 换句话说 S 为 Ω 的扩充空间. 由此在 Ω 上的极小圆盘被视为 S 上极小有理曲线的开集.

20.6 非同维 Cartan-Fubini 延拓定理在逆紧全纯映射刚性问题上的应用

我们发现, VMRT 几何理论与有界对称域上的函数论有着密切的关系. 在某些前提下, 可以证明两个有界对称域之间的逆紧全纯映射必然透过微分把 VMRT 变换为 VMRT 的线性截面. 因此, 如果能把 Cartan-Fubini 延拓原则推广到非同维的情况, 就可以首先取得此类逆紧全纯映射的延拓定理, 进而透过有理曲线的形变理论提供证明逆紧全纯映射刚性性质的一套办法.

要表述 Cartan-Fubini 延拓原则的非同维推广, 需要引进一些概念与用语. 设 X 为单直纹射影流形, $\mathcal{K}$ 为 X 上某一极小有理分支. 对于 X 上的一般点 x, 所有经过 x 的 $\mathcal{K}$ 曲线均为自由有理曲线. 换句话说, 存在有射影子簇 $E \subset X$, 使得任意与 $X - E$ 相交的 $\mathcal{K}$ 曲线均为自由有理曲线. $E \subset X$ 被称为 $\mathcal{K}$ 例外子簇, 简称例外

子簇. 显而易见, 存在有最小的例外子簇. 最近, Hong-Mok[46] 验证了由 Picard 数为 1 的 Fano 空间到任意全直纹射影空间的一般的非同维 Cartan-Fubini 延拓原则, 表述如下.

定理 20.6.1(Hong-Mok[46]) 设 X 为任意单直纹射影流形, Z 为 Picard 数为 1 的 Fano 流形. 设 $\mathcal{C}(X)\subset\mathbb{P}T(X)$ 与 $\mathcal{C}(Z)\subset\mathbb{P}T(Z)$ 分别为 X 与 Z 上由极小有理分支所定义的极小有理切线簇丛. 设 $U\subset Z$ 为任意非空连通开集合, $f:U\to X$ 为全纯浸入, 并假设对任意 $z\in U$, 微分条件 $\mathrm{d}f\big(\widetilde{\mathcal{C}}_z(Z)\big)=\widetilde{\mathcal{C}}_{f(z)}(X)\cap\mathrm{d}f(T_z(Z))$ 成立. 以

$$\sigma_\beta:T_\beta\big(\widetilde{\mathcal{C}}_0(X)\big)\times T_\beta\big(\widetilde{\mathcal{C}}_0(X)\big)\to T_\beta\big(T_x(X)\big)/T_\beta\big(\widetilde{\mathcal{C}}_0(X)\big)$$

表示欧几里得空间上的第二基本形, $V\subset T_\beta\big(\widetilde{\mathcal{C}}_0(X)\big)$ 表示后者的任意线性子空间, 并且定义

$$\mathrm{Ker}\,\sigma_\beta(V,\cdot):=\big\{\delta\in T_\beta\big(\widetilde{\mathcal{C}}_0(\varOmega_2)\big)|\sigma_\beta(\gamma,\delta)=0\ ,\quad\forall\,\gamma\in V\big\}.$$

设 $E\subset X$ 为最小的例外子簇. 假设 $f(U)\not\subset E$, 而对于 U 上的一般点 z 与 $\widetilde{\mathcal{C}}_z(Z)$ 的一般点 α, $\mathrm{d}f(\alpha)$ 为 $\widetilde{\mathcal{C}}_{f(z)}(X)$ 的光滑点, 并且

$$\mathrm{Ker}\,\sigma_{\mathrm{d}f(\alpha)}\big(T_{\mathrm{d}f(\alpha)}\big(\mathrm{d}f(\widetilde{\mathcal{C}}_x(\varOmega_1))\big),\cdot\big)=\mathbb{C}\mathrm{d}f(\alpha)\ .$$

那么, 存在有理映射 $\varPhi:Z\to X$, 使得 $f\equiv\varPhi|_U$, 而 $\varPhi$ 把 Z 上一般的极小有理曲线映入 X 上的极小有理曲线上.

在文献 [45] 中作者利用 VMRT 给出 Ochiai 定理一个微分几何的证明, 而上述定理的证明可以视为文献 [45] 中的方法的推广. 在第 20.4 节我们把有界对称域上有界全纯函数的边界值理论与逆紧全纯映射的刚性问题连结起来, 并举例说明了前者在第一类典型域 $D(p,q)$ 间的逆紧全纯映射刚性问题上的应用. 事实上, 有关上述例子的论证完全可以推广至由不可约有界对称域 $\varOmega$ 至有界对称域之间的任意逆紧全纯映射 $F:\varOmega\to\varOmega'$ 的一般情况, 从而导出在 $\mathrm{rank}(\varOmega'):=r'\leqslant\mathrm{rank}(\varOmega):=r$ 的前提下, 恒有 $r'=r$ 的事实. 以下以 $\varOmega\subset S,\varOmega'\subset S'$ 表示 Borel 嵌入, 并以 $\mathcal{S}_\varOmega\subset\mathbb{P}T_\varOmega$ 标记 $\varOmega\subset S$ 上由极小有理矢量簇所组成的子集, 以 $\mathcal{S}'_{\varOmega'}\subset\mathbb{P}T_{\varOmega'}$ 标记 $\varOmega'\subset S'$ 由极小有理矢量簇所组成的子集. 逆紧全纯映射 F 显然是有限的, 即任意点 $x'\in\varOmega$ 的逆像 $F^{-1}(x')$ 均为有限的, 因此在某分歧集 $R\subsetneqq\varOmega$ 以外的点 x 上 $\mathrm{d}F(x)$ 均为入射的. 对于 F 的非分歧点 $x\in\varOmega$, 运用边界值理论的论证, 可以导出 $\mathrm{d}F(\widetilde{\mathcal{S}}_x)\subset\widetilde{\mathcal{S}'}_{x'}$. 我们称 F 为保存 VMRT 的全纯映射.

对于一般保存 VMRT 的全纯映射芽 $\varphi:(S,0)\to(S',0)$ 而言, (其中 φ 在一般点为全纯浸入), 可以出现退化情形, 例如在 S 与 S' 为 Grassmann 流形 $G(p,q)$ 与 $G(p',q')$ 时 (即 $\varOmega$ 与 $\varOmega'$ 为第一类典型域 $D(p,q)$ 与 $D(p',q')$ 时), 可以出现 $\varphi(S)$ 完

全被包含在 $S' = G(p',q')$ 某一线性射影子空间 Π 的情况. (若以 $\nu: G(p',q') \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ 表示 Plücker 嵌入, $\Pi \subset G(p',q')$ 称为线性射影子空间当且仅当 $\nu(\Pi) \subset \mathbb{P}^N$ 为线性射影子空间.) 再以 Grassmann 流形为例, 当 $\Omega = \mathrm{rank}(D(p,q)) = \min(p,q) \geqslant 2$ 时, 其一般的 (等价于 $D(p-1,q-1)$ 的) 极大边界面 (maximal boundary components) Ψ 在逆紧映射 F 某种意义下的非切向极限 $F^*(\Psi)$ 必然包含在靶空间 $\Omega' = D(p',q')$ 的边界面里. $G(p',q')$ 上的线性射影子空间 Π 与 $D(p',q')$ 的交集等价于单位球 B^n, 而后者的边界面均为孤立点. 由于 $F^*(\Psi)$ 对一般的极大边界面不能退化为孤立点, 上述全纯映射芽的退化情况在逆紧全纯映射的特殊情况并不出现 (参考文献 [24]). 在排除个别退化情况以后, 可以得出 $\mathrm{d}F(\widetilde{\mathcal{S}}_x) = \mathrm{d}F\big(T_x(\Omega)\big) \cap \widetilde{\mathcal{S}}'_{F(x)}$ 的推论, 也就是影像 $[\mathrm{d}F](\mathcal{S}_x) = \big[\mathrm{d}F\big(T_x(\Omega)\big)\big] \cap \mathcal{S}'_{F(x)}$ 为 VMRT $\mathcal{S}'_{F(x)}$ 的某一个线性截面. 由此可以透过定理 20.6.1, 即非同维的 Cartan-Fubini 延拓定理, 得出逆紧全纯映射 $F: \Omega \to \Omega'$ 的亚纯延拓 $\Phi: S \to S'$. 就此特例而言, 蔡宜洵所证明的逆紧全纯映射刚性定理 [8] 可以透过 VMRT 理论得以验证 [24], 而此证明具有一般性的意义.

往下解释如何证明亚纯映射 $\Phi: S \to S'$ 实际上是 Grassmann 流形之间的标准映射, 从而得出 $F: \Omega \to \Omega'$ 为全测地映射的结论. 设 $F(0) = 0$. $T_0(G(p',q')) \cong V \otimes W$, 其中 $\dim_{\mathbb{C}} V = p'$, $\dim_{\mathbb{C}} W = q'$. $\mathcal{S}'_0 \subset \mathbb{P}T_0(G(p',q'))$ 为 $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{p'-1} \times \mathbb{P}^{q'-1}$ 在 Segre 嵌入 ζ 下的影像. 由于 $[\mathrm{d}F](\mathcal{S}_0) = [\mathrm{d}F(T_0(\Omega))] \cap \mathcal{S}'_0$, 即 $\mathcal{S}'_0$ 的线性截面, 存在有 p 维线性子空间 $A \subset V$, q 维线性子空间 $B \subset W$, 使得 $[\mathrm{d}F](\mathcal{S}_0) = \zeta(\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)) \cong \mathbb{P}^{p-1} \times \mathbb{P}^{q-1}$. 序偶 (A, B) 定义了 $S' = G(p',q')$ 某一等价于 $G(p,q)$ 并通过 0 的子流形 Z, 使得 Z 的 VMRT 等同于 $[\mathrm{d}F](\mathcal{S}_0)$. 从 $G(p,q)$ 与 Z 的双全纯映射得出标准映射 $\Theta: G(p,q) \to Z \subset G(p',q')$, 其中 $\Theta(0) = 0$. 最后需要验证的是 $Z \subset G(p',q')$ 作为解析子簇完全等同于 $\Phi: G(p,q) \to G(p',q')$ 的影像 $\Sigma = \Phi(G(p,q))$. 可以假设 0 为 Σ 的光滑点. 首先注意 Σ 与 Z 在 0 点拥有同一个切空间, 而且按照定理 20.6.1 任意在 $S' = G(p',q')$ 上与 Σ 在 0 点相切的极小有理曲线均必然处于 Σ 上, 因此在 Z 上通过 0 点的极小有理曲线均处于 Σ 上, 也就是说 Σ 与 Z 的交集包含了 Z 所有通过 0 点的极小有理曲线的并集 Z_1.

一般而言, 定义 $Z_0 = \{0\}$ 并对任意非负整数 k 按归纳法定义 Z_{k+1} 为所有与 Z_k 相交的射影直线 (极小有理曲线) 的并集. 换句话说, 如果对任意 $z \in Z$ 定义 A_z 为经过 z 的所有处于 Z 上的射影直线 ℓ 的并集, 即 $A_z = \bigcup_{\ell \ni z} \ell$, 则 $Z_{k+1} = \bigcup_{z \in Z_k} A_z$, 那么

$$\{0\} = Z_0 \subsetneqq Z_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Z_r = Z,\ r = \min(p,q) = \mathrm{rank}(Z), \quad Z \cong G(p,q).$$

已知 $0 \in \Phi(G(p,q)) = \Sigma$ 为光滑点, 并且 $Z_1 \subset \Sigma$. 往下运用归纳法验证 $Z = Z_r = \Sigma$. 假设 $Z_k \subset \Sigma$. 设 $z_k \in Z_k$ 为 Σ 一般的光滑点, ℓ_k 为经过 z_k 并处于 Z 上的任

意射影直线. 假如透过归纳法可以证明：

$$(\sharp)_k \quad \ell_k \text{ 必然处于 } \Sigma \text{ 上},$$

那么 $Z_{k+1} = \cup\{A_z | z \in Z_k\} \subset \Sigma$, 因此当 $k = r$ 时得出 $Z = Z_r \subset \Sigma$, 并由于 Z 与 Σ 维数相等而得出 $Z = \Sigma$ 的结论. $(\sharp)_k$ 的证明完全可以透过 $k = 1$ 的特殊情况体现出来 (即 $Z_2 \subset \Sigma$ 的证明). 设 $z_1 \in Z_1$ 为 Σ 的光滑点, ℓ_0 为经过 0 并包含 z_1 的射影直线, $z_1 = \Phi(x_1)$. 那么 $[\mathrm{d}\Phi](\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}'_0 \cap \mathbb{P}T_0(\Sigma) = \mathcal{S}'_0 \cap \mathbb{P}T_0(Z), [\mathrm{d}\Phi](\mathcal{S}_{x_1}) \subset \mathbb{P}T_{z_1}(\Sigma)$. 运用有理曲线的形变理论可以导出以下的事实：$[\mathrm{d}\Phi](\mathcal{S}_{x_1})$ 在点 $[\alpha] = \mathbb{P}T_{x_1}(\ell_0) \in [\mathrm{d}\Phi](\mathcal{S}_{x_1})$ 上的切空间完全由 $T_{x_1}(Z_1)$ 所确定. 因此, 射影子簇 $[\mathrm{d}\Phi](\mathcal{S}_{x_1}) \subset \mathbb{P}T_{z_1}(S')$ 与 $\mathcal{S}'_{z_1} \cap \mathbb{P}T_{z_1}(Z) \subset \mathbb{P}T_{z_1}(S')$ 在点 $[\alpha]$ 上是相切的. 事实上,

$$T_{[\alpha]}\big([\mathrm{d}\Phi](\mathcal{S}_{x_1})\big) = T_{[\alpha]}\big(\mathcal{S}'_{z_1} \cap \mathbb{P}T_{z_1}(Z)\big) = T_{z_1}(Z_1)/\mathbb{C}\alpha.$$

在包括 Grassmann 流形一类的有理齐次空间的特殊情况, 可以从上述两组射影子簇在 $[\alpha]$ 点相切的事实推出 $[\mathrm{d}\Phi](\mathcal{S}_{x_1})$ 实际上等同于 $\mathcal{S}'_{z_1} \cap \mathbb{P}T_{z_1}(Z)$ (参考文献 [24]), 由此任意在 Z 上并经过 z_1 的射影直线 ℓ_1 必然处于 Σ 上, 使得 $Z_2 \subset \Sigma$. 往下为方便起见我们把 $[\mathrm{d}\Phi](\mathcal{S}_{x_1})$ 称为 Σ 的 VMRT, 把 $\mathcal{S}'_{z_1} \cap \mathbb{P}T_{z_1}(Z)$ 理解为 Z 的 VMRT. 那么, 在包括 Grassmann 流形一类的有理齐次空间的特殊情况莫毅明 [24] 的论证可以演绎为某种刚性定理. 笼统地说, Z 与 Σ 上的 VMRT 完全可以从已知点 0 沿着极小有理曲线 ℓ_0 平移到新的点 z_1 上, 由此 Σ 与 Z 在 0 点的 VMRT 是相同的.

设 $M \cong G(r,s)$ 为任意秩 $\geqslant 2$ 的 Grassmann 流形, $T_M \cong U \otimes V$ 为全纯切丛 T_M 的典型张量分解, 其中 U 为秩等于 r 的万有矢量丛, V 为秩等于 s 的万有矢量丛. 设 $W \subset M$ 为 M 上某一开集, $E \subset W$ 为 W 上的非空连通复子流形. 我们说 $E \subset W$ 承袭 Grassmann 子结构当且仅当 $T_E = A \otimes B$, 其中 $A \subset U$ 与 $B \subset V$ 均为全纯子矢量丛; $\mathrm{rank}(A) := p, \mathrm{rank}(B) := q$. Hong[47] 以完全不同的方法证明了以下的事实：若 $E \subset W$ 承袭秩 $\geqslant 2$ 的 Grassmann 子结构 (即 $\min(p,q) \geqslant 2$), 则 E 为 M 上某一 Grassmann 子流形上的开集. 本节运用非同维 Cartan-Fubini 延拓 (即定理 20.6.1)) 的论证所导出的结果仅包含了当 E 上的 Grassmann 结构为平坦的特殊情况. (沿用本节前文所使用的标记, $\Sigma \subset S'$ 在 0 点的复流形芽是由 $F : \Omega \to \Omega'$ 诱导出来的, 因此 Σ 在 0 点邻域上的 S 结构如同 Ω 上的 S 结构一样必然是平坦的.) 可以设想, 上述文献 [47] 的结果, 可以透过两个步骤得以证明：

(1) 证明 E 上的 Grassmann 结构必然是平坦的;

(2) 运用非同维 Cartan-Fubini 延拓定理证明 E 为某一 Grassmann 子流形的开集.

VMRT 几何理论提供了步骤 (2). 另外, (2) 也可以透过别的办法得以证明 (参考文献 [48]). 然而,VMRT 几何理论具有更一般的意义, 适用于刻画某些有理齐次空间 G/P 之间的标准映射 [46].

20.7　具几何结构的有界域: 边界值理论与 VMRT 几何理论的双结合

本文围绕着秩 $\geqslant 2$ 不可约有界对称域 Ω 上的全纯映射, 透过各种函数论与几何的方法, 讨论此类全纯映射的刚性性质. 讨论的内容包括:

(1) Γ 共变有界全纯映射;

(2) 逆紧全纯映射 $F : \Omega \to \Omega'$.

首项中, Γ 为格点子群, 而 "Γ 共变有界全纯映射" 指的是从 Ω 映入有界域 $D \Subset \mathbb{C}^N$ 的 Γ 共变全纯映射 $F : \Omega \to D$, 即存在群同态 $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Aut}(D)$, 使得全纯映射 $F : \Omega \to D$ 相对于任意 $\gamma \in \Gamma$ 满足 $F(\gamma(z)) = \Phi(\gamma)(F(z))$. 次项中 Ω' 指的是秩等同于 $r := \mathrm{rank}(\Omega)$ 的有界对称域. 就方法论而言, 本章讨论范围包括:

(1) 拓扑方法 (陈类的不变性);

(2) 李群上的遍历理论;

(3) 调和分析, 有界全纯映射的边界值理论;

(4) 多复变函数论的解析延拓方法;

(5) VMRT 几何理论.

陈类的不变性为度量刚性定理的起点. 受积分公式所限, 此方法只适用于格点子群 Γ, 也即仅适用于有限体积商空间 $X = \Omega/\Gamma$. 可以展望, 把调和分析方面关于有界全纯函数的边界值理论与代数几何范畴里 VMRT 几何理论相结合, 可以发展出一套更宽的关于有界域上全纯映射的刚性性质的理论. 就本章迄今的讨论, 可以展望研究范围有以下的扩展.

(1) 以有界全纯函数的边界值理论取代拓扑方法 (即陈类的不变性);

(2) 以关于遍历性质的假设取代 $X = \Omega/\Gamma$ 有限体积的假设, 从而把刚性现象扩充至某些无限体积商空间;

(3) 把关于有界对称域上逆紧全纯映射的研究推广至靶空间 Ω' 与 Ω 的秩之间可以存在间隙的一般情况;

(4) 把关于逆紧全纯映射的研究对象推广至包括 Pyatetskii-Shapiro[49] 所定义的有界齐次域, 和某些具几何结构的非齐次域, 例如, Akhiezer-Gindikin 域 (参考文献 [50]).

在第 20.6 节里探讨的以边界值理论研究逆紧全纯映射的方法, 源自莫毅明与蔡宜洵 [9] 关于秩 $\geqslant 2$ 不可约有界对称域 Ω 的凸体现的唯一性定理. 上述定理的证明牵涉到代数几何范畴里模空间的概念与多复变函数论里有关全纯域的解析延拓方法. 文章证明, Ω 的有界凸体现必然等价于 Harish-Chandra 体现, 而无界凸体

现都必然等价于 Harish-Chandra 体现的 (部分) Cayley 变换. 任意有界齐次域均双全纯等价于第二类 Siegel 域 (参考文献 [5, 49]). 后者是无界齐次域, 因此可以进一步研究有界齐次域凸体现的存在性与唯一性.

可以猜想, 除掉秩等于 1 的例外情况和有界对称域的 Harish-Chandra 体现, 有界齐次域一般并不拥有有界凸体现, 而且有界齐次域的无界凸体现均可透过第二类 Siegel 域的体现形式与有界对称域的 (部分)Cayley 变换重构出来.

总的来说, 对具几何结构的有界域上有界全纯映射的研究, 因着边界值理论和遍历理论的运用和 VMRT 几何理论的发展, 在目前多复变函数论的领域里有着相当广阔的发展空间. 从方法论的角度着眼, 这个研究方向跨越分析与几何的多个领域: 多复变函数论、调和分析、遍历理论、李群、(全纯) 微分几何、代数几何等等. 就研究的对象而言, 它源自有界对称域与其扩充空间, 但显然可以推广至有界齐次域的范畴, 更进一步理应适用于某些非齐次但具几何结构的有界域上. 此处如何界定几何结构的确切意义就是一个需要探讨的问题. 以 VMRT 几何理论为启发, 几何结构可以源自在区域上经过任意基点的某些局部全纯曲线族所定义出来的特殊切线簇 (variety of special tangents). 在仿射复齐次流形 (affine complex homogeneous manifold) X 上存在有某些全纯等价于有界域的特殊区域 D (或更一般地拥有充分多有界全纯函数的特殊区域 D). 在此等区域上, 理论上可以透过 X 的光滑射影紧化 (smooth projective compactification) M 上的极小有理曲线族和伴随的极小有理切线簇 (VMRT) 诱导出区域上的特殊切线簇. 寻找具有几何意义并赋有一套研究边界值的调和分析方法的特殊区域 $D \subset X \subset M$ 本身就是一个有趣的课题. Akhiezer-Gindikin 域 [51] 是值得探讨的例子.

谨以此文祝贺殷慰萍教授 70 岁寿辰.

本章参考文献

[1] Borel A. On the curvature tensor of the Hermitian symmetric manifolds. Ann Math, 1960, 71: 508～521

[2] Calabi E, Vesentini E. On compact locally symmetric Kähler manifolds. Ann Math, 1960, 71: 472～507

[3] Siu Y T. The complex analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds. Ann Math, 1980, 112: 73～111

[4] Siu Y T. Strong rigidity of compact quotients of exceptional bounded symmetric domains. Duke Math J, 1981, 48: 857～871

[5] Mok N. Uniqueness theorems of Hermitian metrics of seminegative curvature on locally symmetric spaces of negative Ricci curvature. Ann Math, 1987, 125: 105～152

[6] To W K. Hermitian metrics of seminegative curvature on quotients of bounded sym-

metric domains. Invent Math, 1989, 95: 559～578

[7] Mok N. Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Manifolds. Series in Pure Mathematics Vol. 6. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1989

[8] Tsai I H. Rigidity of proper holomorphic maps between symmetric domains. J Diff Geom, 1993, 37: 123～160

[9] Mok N, Tsai I H. Rigidity of convex realizations of irreducible bounded symmetric domains of rank 2. J Reine Angew Math, 1992, 431: 91～122

[10] Miyaoka Y, Mori S. A numerical criterion for uniruledness. Ann Math, 1986, 124: 65～69

[11] Mok N. Rigidity problems on compact quotients of bounded symmetric domains. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 2007, 39: 201～249

[12] Matsushima Y. On the first Betti number of compact quotient spaces of higher-dimensional symmetric spaces. Ann of Math, 1962, 75: 312～330

[13] Mok N. Aspects of Kähler geometry on arithmetic varieties. A M S Proc of Symp in Pure Math, 1991, 52(2): 335～396

[14] Margulis G A. Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3. Folge). Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989

[15] Mok N, Siu Y T, Yeung S K. Geometric superrigidity. Invent Math, 1993, 113: 57～83

[16] Mok N. Characterization of certain holomorphic geodesic cycles on quotients of bounded symmetric domains in terms of tangent subspaces. Compositio Math, 2002, 132: 289～309

[17] Raghunathan M S. Discrete Subgroups of Lie Groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grundgebiete. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1972

[18] Zimmer R J. Ergodic Theory and Semisimple Groups. Monographs in Mathematics. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1984

[19] Mok N. Extremal bounded holomorphic functions and an embedding theorem for arithmetic varieties of rank $\geqslant 2$. Invent Math, 2004, 158: 1～31

[20] Rudin W. Real and Complex Analysis, 3rd Ed. New York: McGraw-Hill, 1987

[21] Korányi A. Harmonic functions on symmetric spaces. In: Geometry of Symmetric Spaces. Boothby-Weiss ed. New York: Marcel-Dekker, 1972, 379～412

[22] Wolf J A. Fine structure of Hermitian symmetric spaces. In: Geometry of Symmetric Spaces. Boothby-Weiss ed. New York: Marcel-Dekker, 1972, 271～357

[23] Korányi A. Poisson integrals and boundary components of symmetric spaces. Invent Math, 1976, 34: 19～35

[24] Mok N. Characterization of standard embeddings between complex Grassmannians by

means of varieties of minimal rational tangents. Science in China Series A: Mathematics, 2008, 51: 660～684

[25] Mok N. Ergodicity, bounded holomorphic functions and geometric structures in rigidity results on bounded symmetric domains. In: Proceedings of the International Congress of Chinese Mathematicians (Hangzhou 2007). Beijing: Higher Educational Press, 2007, 2: 464～505

[26] Henkin G M, Novikov R. Proper mappings of classical domains. In: Linear and Complex Analysis Problem Book, Lecture Notes in Math. New York: Springer-Verlag, 1984, 1043: 625～627

[27] Tu Z H. Rigidity of proper holomorphic mappings between nonequidimensional bounded symmetric domains. Math Z, 2002, 240: 13～35

[28] Mok N. Nonexistence of proper holomorphic maps between certain classical bounded symmetric domains. Chin Ann Math Ser B, 2008, 29: 135～146

[29] Tu Z H. Rigidity of proper holomorphic mappings between equidimensional bounded symmetric domains. Proc Amer Math Soc, 2002, 130: 1035～1042

[30] Tumanov A E. Finite dimensionality of the group of C-R automorphisms of Siegel domains. Dokl Akad Nauk SSSR, 1988, 52: 651～659

[31] Ochiai T. Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces. Trans Amer Math Soc, 1970, 152: 159～193

[32] Hwang J M, Mok N. Characterization and deformation-rigidity of compact irreducible Hermitian symmetric spaces of rank $\geqslant 2$ among Fano manifolds. Proceedings of the International Conference of Algebra and Geometry (National Taiwan University, Taipei 1995). Cambridge: International Press, 15～46

[33] Kollár J. Rational curves on algebraic varieties. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3. Folge). Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1996

[34] Hwang J M, Mok N. Holomorphic maps from rational homogeneous spaces of Picard number 1 onto projective manifolds. Invent Math, 1999, 136: 209～231

[35] Hwang J M, Mok N. Birationality of the tangent map for minimal rational curves. Asian J Math, 2004, 8: 51～64

[36] Hwang J M, Mok N. Prolongations of infinitesimal linear automorphisms of projective varieties and rigidity of rational homogeneous spaces of Picard number 1 under Kähler deformation. Invent Math, 2005, 160: 591～645

[37] Mori S. Projective manifolds with ample tangent bundles. Ann Math, 1979, 110: 593～606

[38] Mok N. The uniformization theorem for compact kähler manifolds of nonnegative bisectional curvature. J Diff Geom, 1988, 27: 179～214

[39] Kebekus S. Families of singular rational curves. J Alg Geom, 2002, 11: 245～256

[40] Cho Koji, Miyaoka Yoichi, Shepherd-Barron N I. Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds. In: Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997), Adv Stud Pure Math, 35, Math Soc Japan, Tokyo, 2002, 1～88

[41] Hwang J M, Mok N. Varieties of minimal rational tangents on uniruled manifolds. In: Several Complex Variables. Schneider M, Siu Y T ed. MSRI Publications. Cambridge University Press, 1999, 37: 351～389

[42] Hwang J M, Mok N. Cartan-Fubini type extension of holomorphic maps for Fano manifolds of Picard number 1. J Math Pure Appl, 2001, 80: 563～575

[43] Hwang J M. Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds, School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste 2000), ICTP Lect. Notes 6, Abdus Salam Int Gent Theoret Phy Trieste, 2001, 335～393

[44] Mok N. Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents. In: the Proceedings of the Conference “Differential Geometry, Mathematical Physics, Mathematics and Society” in honor of Jean-Pierre Bourguignon at IHES-Ecole (August 2007) Polytechnique, in the series “Séminaire et Congrès” of Société Mathématique de France

[45] Mok N G. Structures on irreducible Hermitian symmetric spaces of rank $\geqslant 2$ and deformation rigidity. In: Complex Geometric Analysis in Pohang. Contemp Math, 1999, 222: 81～107

[46] Hong J, Mok N. Analytic continuation of holomorphic maps respecting varieties of minimal rational tangents and applications to rational homogeneous manifolds. In preprint.

[47] Hong J. Rigidity of smooth Schubert varieties in Hermitian symmetric spaces. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 2361～2381

[48] Neretin Y A.Conformal geometry of symmetric spaces, and generalized linear-fractional Krein-Smul’yan mappings. Mat Sb, 1999, 190: 93～122; translation in Sb Math, 1999, 190: 255～283

[49] Pyatetskii-Shapiro II. Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains. New York, London, Paris: Gordon and Breach Science Publishers, 1969

[50] Akhiezer D N, Gindikin S. On the Stein extensions of real symmetric spaces. Ann Math, 1990, 286: 1～12

[51] Xu Y C. Theory of complex homogeneous bounded domains. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2005

作 者 介 绍

莫毅明. 1980 年于美国斯坦福大学取得博士学位, 1984 年获得美国 Sloan 基金, 1985 年获得美国总统年青研究人员奖, 1998 年获得香港裘槎奖 (Croucher Award), 2007 年获得国家自

然科学奖二等奖. 莫毅明历任美国哥伦比亚大学与法国巴黎大学 (Orsay) 正教授, 1994 年回港服务, 任香港大学讲座教授, 1999 年始兼任数学研究所所长. 回港服务后 1994 年应邀在苏黎世的 ICM 实分析与复分析小组作 45 分钟的报告, 2004 年应邀在 ICM2006 年的代数几何与复几何小组任核心选委, 目前兼任《中国科学 A 辑》,《国际数学期刊》, *Inventiones Mathematicae* 与*Mathematische Annalen* 的编辑委员. 莫毅明自毕业始致力于复几何的研究, 内容涵盖多复变函数论、复微分几何与代数几何等领域, 迄今共发表相关著作 70 余篇, 其中发表在*Annals of Mathematics* 与*Inventiones Mathematicae* 的论文共 10 篇. 1988 年解决了广义 Frankel 猜想, 1989 年与钟家庆合作证明了关于完备 Kähler 流形的紧化定理, 1999 年与 J. M. Hwang 合作解决了 Lazarsfeld 问题, 并透过一系列文章于 2005 年合作证明了 Picard 数为 1 的有理齐次空间 G/P 在代数几何意义下的形变刚性定理, 成功解决了代数几何范畴里 40 多年来悬而未决的一道经典难题.