

《數趣漫話》

談情說數

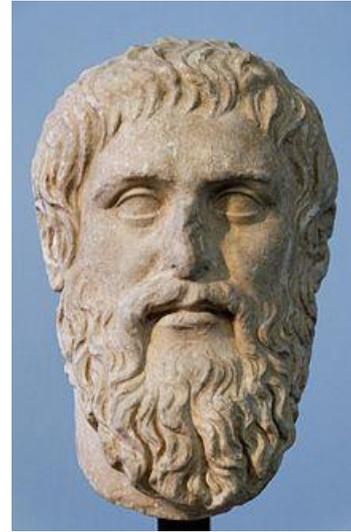
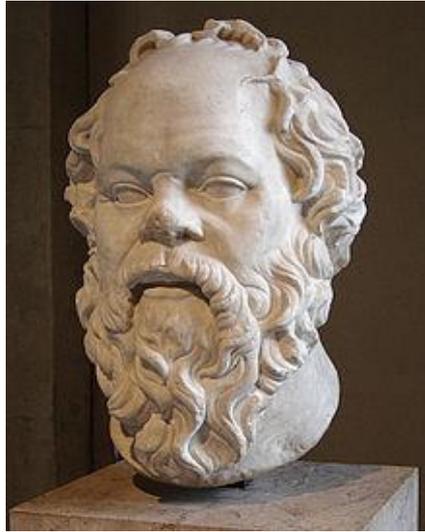
— 跟愛情有關的數學

吳端偉博士
香港大學數學系

2013年5月4日

什麼是愛情？

蘇格拉底(Socrates)
469 BC – 399 BC



柏拉圖(Plato)
428/427 BC –
348/347 BC

- 有一天，柏拉圖問他的老師蘇格拉底：

什麼是愛情？我如何可以找到它？

什麼是愛情？



- 蘇格拉底回答說：“在前面有一個麥田。你要向前不回頭地走，在途中要摘一棵最大最好的麥穗，但只可以摘一次，如果您發現最大最好的麥穗，那麼你已經找到愛情。”

什麼是愛情？



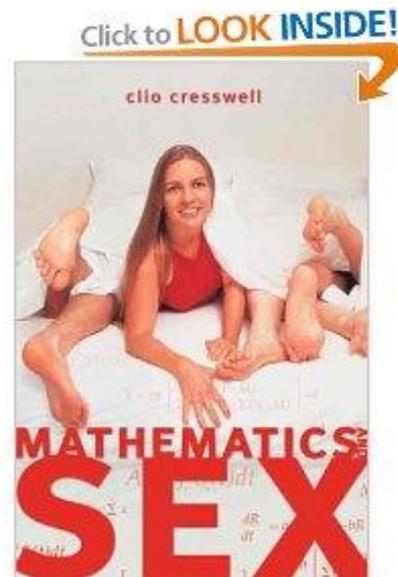
- 柏拉圖向前走去，過了半天他仍沒有回去，最後，他兩手空空垂頭喪氣地出現在蘇格拉底跟前，訴說空手而回的原因：

「很難得看見一株看似不錯的，卻不知是不是最好，因為只可以摘一次，只好放棄，再看看有沒有更好的，到發現已經走到盡頭時，才發覺手上一棵麥穗也沒有。」

這時，蘇格拉底告訴他：「那就是愛情。」

Clio Cresswell (The University of New South Wales Sydney, Australia):

“If you meet someone who is really great, how do you know you won’t meet someone who is **really, really great?**”



怎樣才可捕捉到條件最好的男人？

- 假設你在未來二十年內，會遇到N個男人追求你，他們一個接一個的出現，但你不知道什麼時候最好的男人會出現。



當一個追求者出現時，你要決定是否拒絕他，假設你拒絕了他，他將一去不返。

怎樣才可捕捉到條件最好的男人？

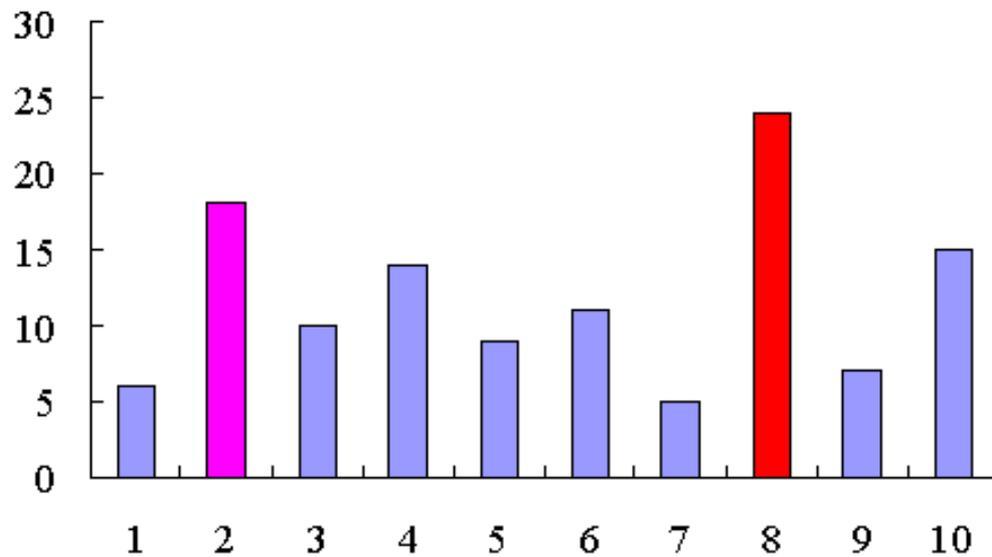
最後假設最好的男人在任一位置出現的概率相同。

- 你應拒絕頭37%出現的追求者。
- 但你應對這0.37N個男人逐一評估，找出並記下當中質素(得分)最高的一個。

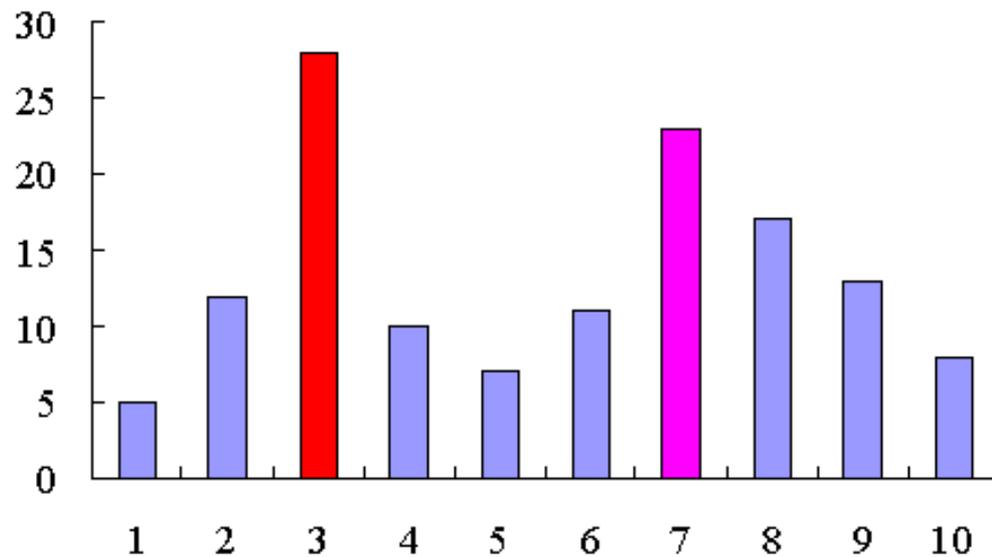
然後在餘下0.63N個追求者中，選擇第一個得分高過頭37%中最高分的一個。

這個37%的策略將最大限度地提高你找到最好的男人的機會。

37%策略



成功



不成功

x%策略

當 x 太大時，容易拒絕條件最好的男人。

當 x 太小時，抽取的樣本太小，容易太早接受條件差的男人。

應該選擇哪一個 x ?

當 $x=37$ 時，能捕捉到條件最好的男人的概率最大。

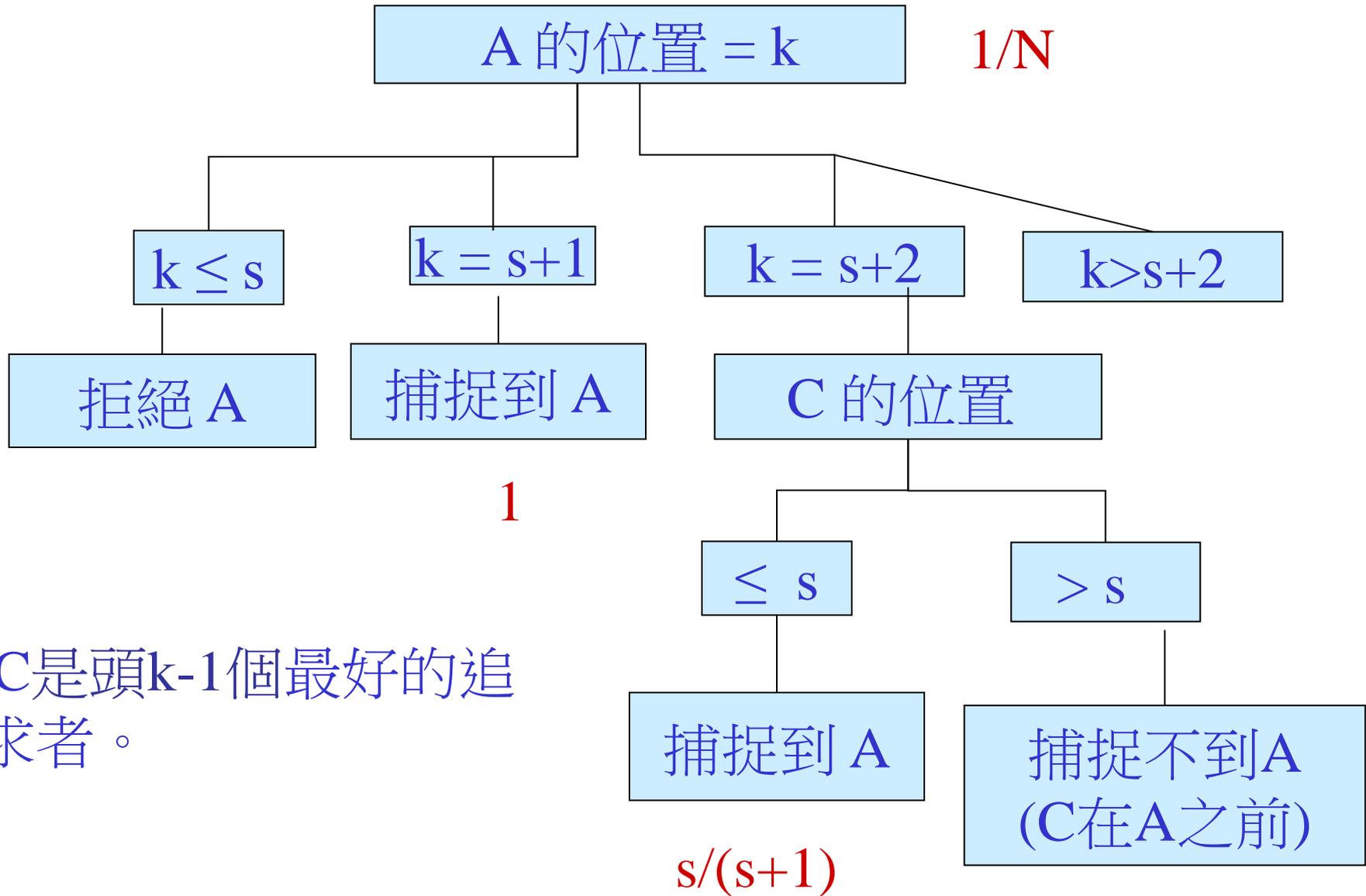
x%策略 VS 37%策略

當 $x=37$ 時，能捕捉到條件最好的男人的概率最大

證明:

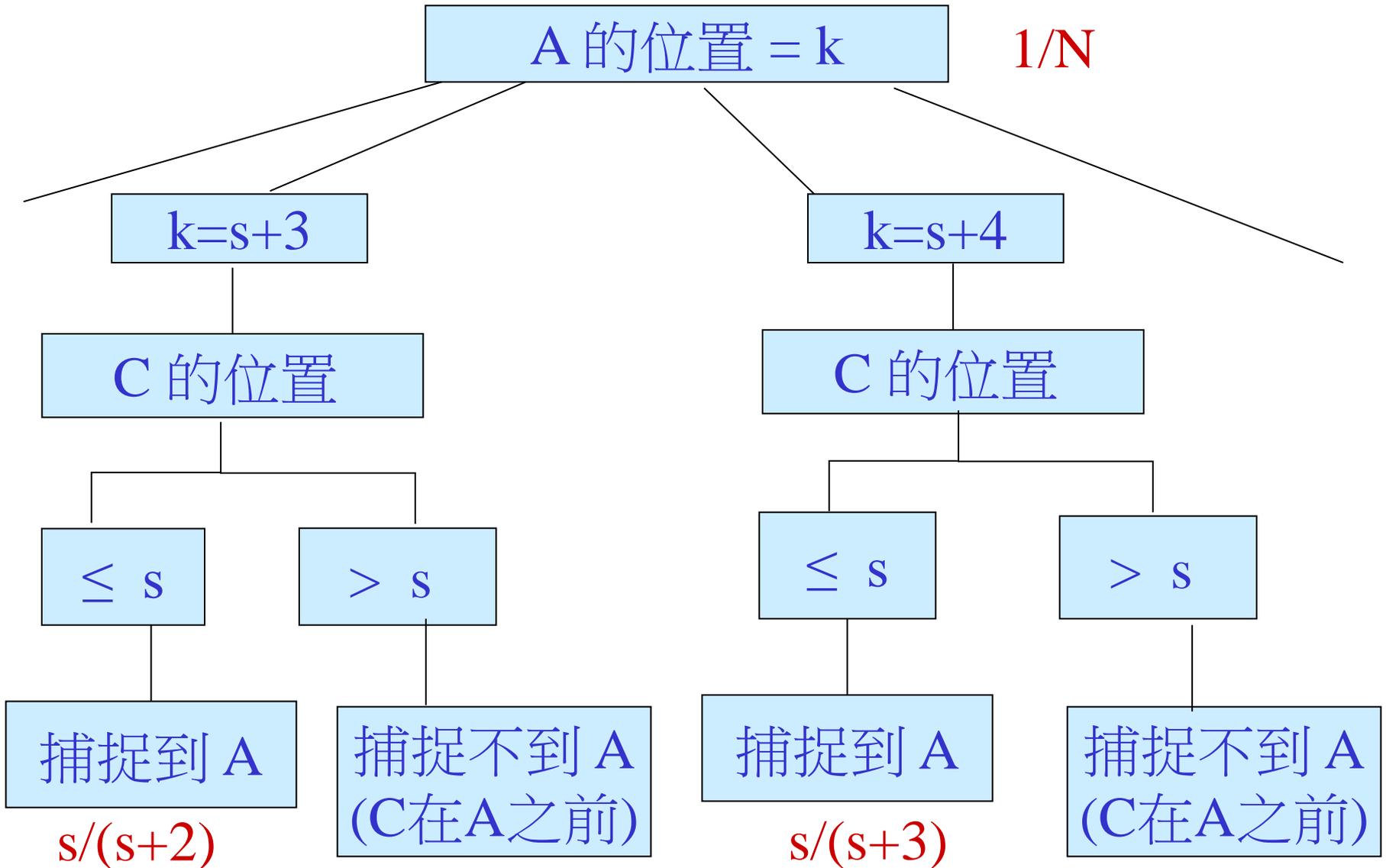
- ❖ 假設有 N 個男人並且最好的男人(A)在任一位置出現的概率相同。
- ❖ 根據假設，A在任一位置 k 出現的概率為 $1 / N$ 。
- ❖ 假設頭 s ($s < N$) 個追求者將被拒絕。
- ❖ 假設C是頭 $k-1$ 個最好的追求者。

捕捉到 A 的概率？



❖ C是頭 $k-1$ 個最好的追求者。

捕捉到 A 的概率？



❖ 捕捉到 A 的概率是

$$p(s) = \frac{1}{N} \times \left(1 + \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+2} + \frac{s}{s+3} + \cdots + \frac{s}{N-1} \right)$$

什麼 s 會使 $p(s)$ 的值最大？

代入 $s=1, \dots, N$ ，會發現 $p(s)$ 先增加，達到最大值後便下降。

❖ 可以證明 $p(s)$ 的值最大在 $s = \frac{N}{e} \sim 0.37N$ 出現。

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \doteq 2.71828 \dots$$

證明 $p(s)$ 的值最大在 $s = \frac{N}{e} \sim 0.37N$ 出現

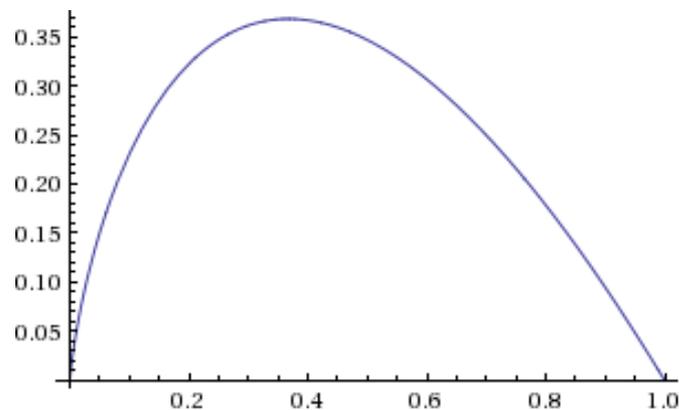
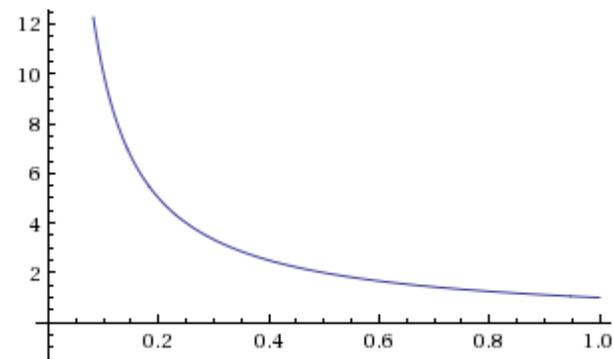
$$\begin{aligned} p(s) &= \frac{1}{N} \times \left(1 + \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+2} + \frac{s}{s+3} + \cdots + \frac{s}{N-1} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{s}{s} + \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+2} + \frac{s}{s+3} + \cdots + \frac{s}{N-1} \right) \\ &= \frac{s}{N} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \cdots + \frac{1}{N-1} \right) \\ &= \frac{s}{N} \sum_{k=s}^{N-1} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

證明 $p(s)$ 的值最大在 $s = \frac{N}{e} \sim 0.37N$ 出現

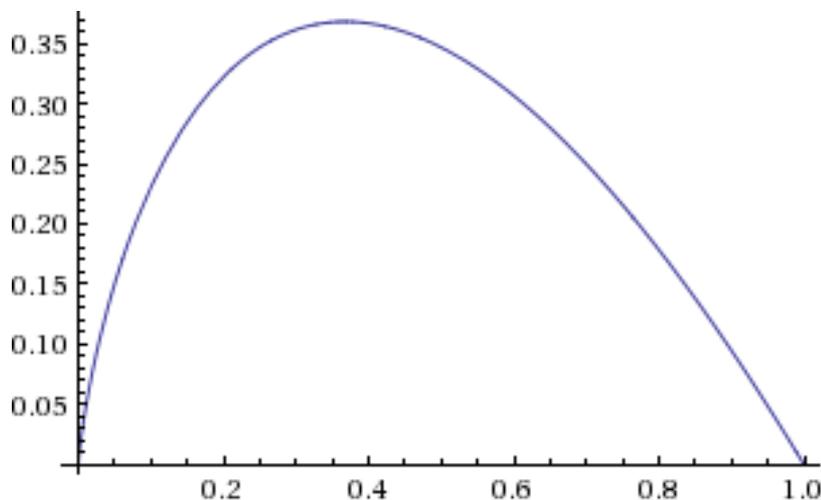
$$p(s) = \frac{s}{N} \sum_{k=s}^{N-1} \frac{1}{k}$$
$$= \frac{s}{N} \sum_{k=s}^{N-1} \frac{1}{\frac{k}{N}} \cdot \frac{1}{N}$$

$$\doteq x \int_x^1 \frac{1}{t} dt \quad \left(x = \frac{s}{N} \text{ for large } N\right)$$

$$= -x \ln x$$



證明 $p(s)$ 的值最大在 $s = \frac{N}{e} \sim 0.37N$ 出現



$$q(x) = -x \ln x, \quad q'(x) = -1 - \ln x$$

$$q'(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e} \doteq 0.37$$

$$s = xN = \frac{N}{e} \sim 0.37N$$

$$p\left(\frac{N}{e}\right) = -\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \doteq 0.37$$

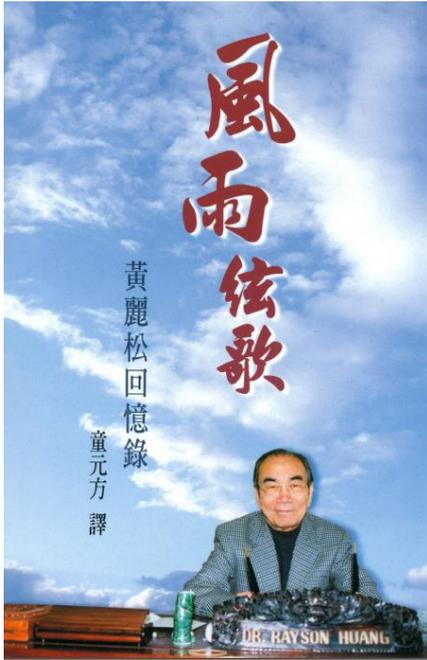
37%策略

- 「秘書問題」 (Secretary problem [1960])
- 可用來選擇一個好秘書或選擇一個好的餐廳
- 「最優停時理論」 (The theory of optimal stopping)
- 缺點: 需要估計 N ; 假設不能回頭。
- 優點: 從樣本的素質來定一個合理的要求。

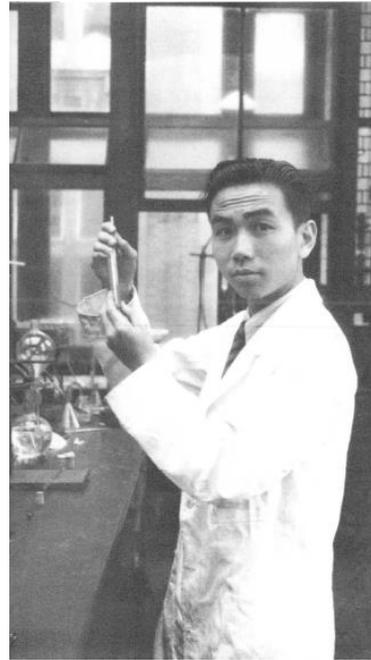
H Robbins, Optimal stopping, The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 4, (1970), pp. 333-343.

Thomas S. Ferguson, Optimal Stopping and Applications (<http://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html>)

黃麗松校長與太太李威



《風雨弦歌》(2000)



攝於牛津大學，
一九四四年。



李威，攝於一九四八
年，上海。

黃麗松校長與太太李威



芝加哥大學國際學舍前，攝於一九四九年。



黃麗松與李威於一九四九年在芝加哥神學院索爾戴克希爾頓教堂共諧連理。

約會話題



哪一個長些？圓周或杯身？

約會話題

單身



已婚

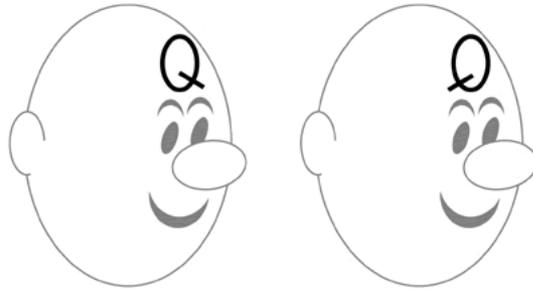
答案: A) 是; B) 不是; C) 不能確定

問題: 是否一個已婚的在看一個單身的?

約會話題：Q Test

用你慣用手的食指，在你的額頭上寫出“Q”。

他人為中心的人
(Other-centered)

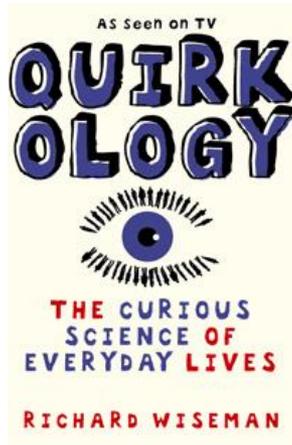


自我為中心的人
(Self-centered)

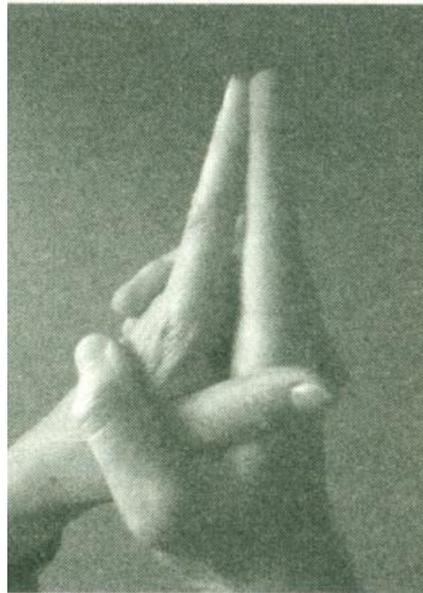
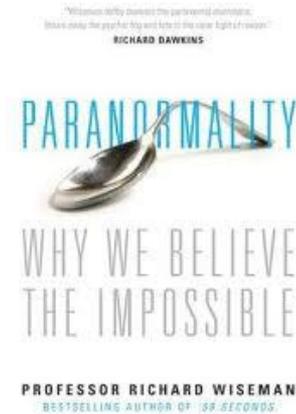
自我為中心的人：不在乎別人怎麼看自己，往往在不同的情況下，能保持自己的價值觀。

他人為中心的人：關心別人怎麼看自己。喜歡別人關注，可以很容易地調整自己的行為，以適應形勢。

約會話題



Richard
Wiseman



幻肢痛楚 (Phantom Limb Pain)



約會話題



今晚六時半尖沙咀

二零一三年五月四日星期六七時

如何求婚？

你可以叫你女朋友答應你一個簡單的請求。

「我有一個請求，我讓你看這張紙上所寫的一個句子。如果這句子是真的，請你給我一個吻；否則的話，便不要吻我，你能答應我這個要求嗎？」

通常情況下，作為你的女朋友，她沒有理由拒絕你。

於是，她同意吻你當且僅當紙上的句子是真的。

如何求婚？

這時你便趕緊把紙交給你女朋友，她將看到以下的句子（P）：

P：你既不會吻我，亦不會跟我結婚。

當你女朋友正在狐疑之際，你慎重告訴她，她剛答應的那個要求，其實隱含了答應跟你結婚！

為什麼呢？因為我們可以證明只要你女朋友答應**你的要求**，你女朋友必會跟你結婚。

詳細的論證如下：

如何求婚？

句子P：你既不會吻我，亦不會跟我結婚。

記住你女朋友同意吻你**當且僅當**句子P是真的！

先考慮若句子P為真時的情形。

由於你女朋友答應了你的要求，故要吻你，但因此句子P便變成假的，這是一個矛盾的結論，所以句子P一定是假的。

如何求婚？

句子P：你既不會吻我，亦不會跟我結婚。

記住你女朋友同意吻你**當且僅當**句子P是真的！

另一方面，若句子P是假的，則句子P的相反是真的。

換句話說一是你女朋友會吻你，一是她會跟你結婚，其一必定是真的。

由於你女朋友不會吻你，所以她一定會跟你結婚。

如何求婚？

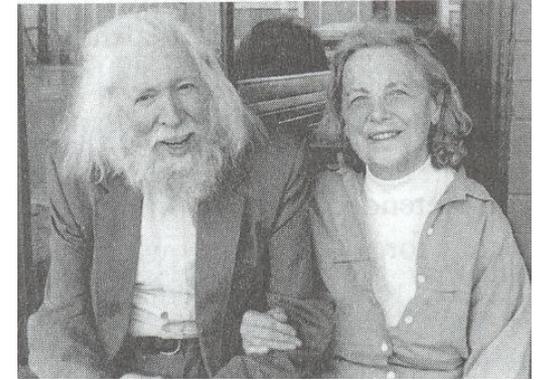
這個方法的竅訣是只告訴對方一個無關痛癢的要求，並把你真正的要求（例如求婚）以句子P的形式表達。

當對方答應你那簡單的要求時，便無可避免要答應你真正的要求。

這個方法方法的一個好處是若對方真的想拒絕你的求婚，她可以一直裝作聽不懂你的解釋，這時你便要懂得轉換話題。



這裏提供的方法是數學家Raymond M. Smullyan在普林斯頓念研究院時想出的，他便是用這妙計來追求他太太。故事的細節可在Smullyan的自傳：

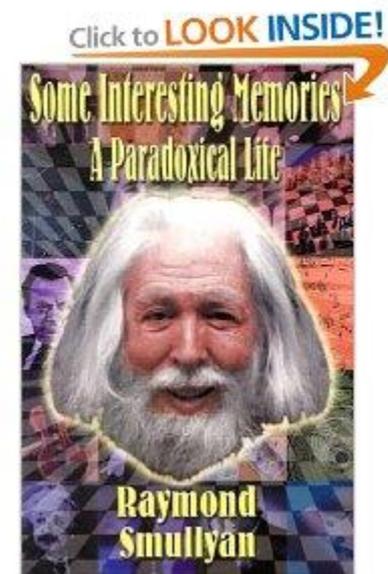


Some Interesting Memories: A Paradoxical Life

著名的著作：

1) What Is the Name of This Book?

2) This Book Needs No Title

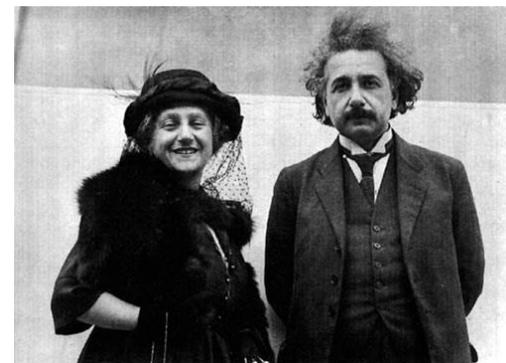


離婚分財產



Mileva Maric
1903年嫁給愛因斯坦

在1919年的離婚協議中，愛因斯坦的妻子要求他將來獲得諾貝爾獎時，要**全數**給她。



Elsa Einstein
1919年嫁給愛因斯坦



Robert E. Lucas

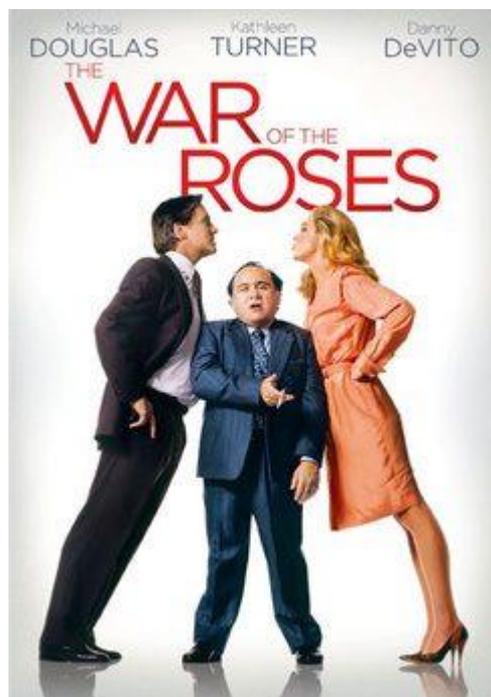
在1988年的離婚協議中，盧卡斯的妻子要求他若**七年內**獲得諾貝爾獎，要**半數**給她。

**1995年獲諾貝爾
經濟學獎！**

離婚分財產



夫婦離婚協議中，必須分配共同的財產。
困難在於當很多財物是**不能分割**時，如何達到雙方都覺得**公平**的分配。



**The War of the
Roses (1989)**

http://www.youtube.com/watch?v=5ebv3i_9Ltc

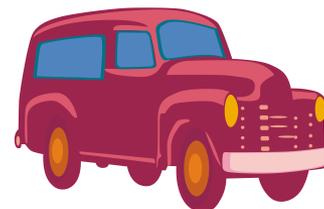
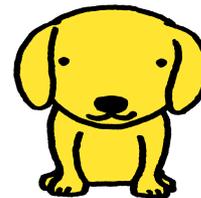
離婚分財產



困難在於很多財物是不能分割的。

要盡可能公平的分配財產，我們可使用「調整贏家法」(Adjusted Winner Procedure)。

假設大雄和靜香要離婚，他們要分配下列財產。



雙方將**100點**分發給所有財物，**看重的給分多些**。
 靜香和大雄的點數分佈如下。

靜香

財物

大雄



35

屋

15



20

銀行存款

25



10

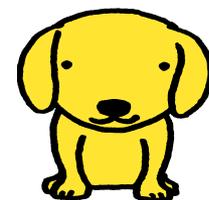
鋼琴

25

5

電視

15



25

狗

10

5

車

10



100

Total

100



「調整贏家法」 (Adjusted Winner Procedure) 分三階段。
 在第一階段，每個項目會先給予最重視它的人。

60

靜香



35

20

10

5

25

5

100

財物

屋

銀行存款

鋼琴

電視

狗

車

Total

75

大雄



15

25

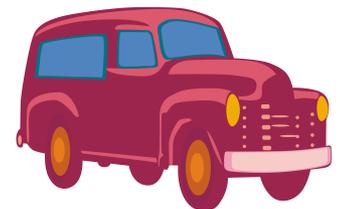
25

15

10

10

100

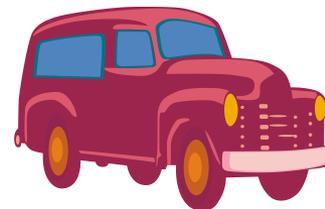


「調整贏家法」 (Adjusted Winner Procedure)

在這階段，靜香有60點，大雄有75點。

由於大雄有的點數多一些，我們說大雄是初勝者。

在下一階段，由於大雄有更多點數，我們需要從大雄的項目，部分轉移給靜香，直到每人的總點數相等。



大雄應先轉移哪一項目給靜香呢？

對大雄(初勝者)的項目，逐一計算大雄/靜香的點數比。

$$\text{銀行存款} : \frac{25}{20} = 1.25$$

$$\text{鋼琴} : \frac{25}{10} = 2.5$$

$$\text{電視} : \frac{15}{5} = 3$$

$$\text{車} : \frac{10}{5} = 2$$

大雄應先轉移哪一項目給靜香呢？

應先轉移點數比最小的項目給靜香。

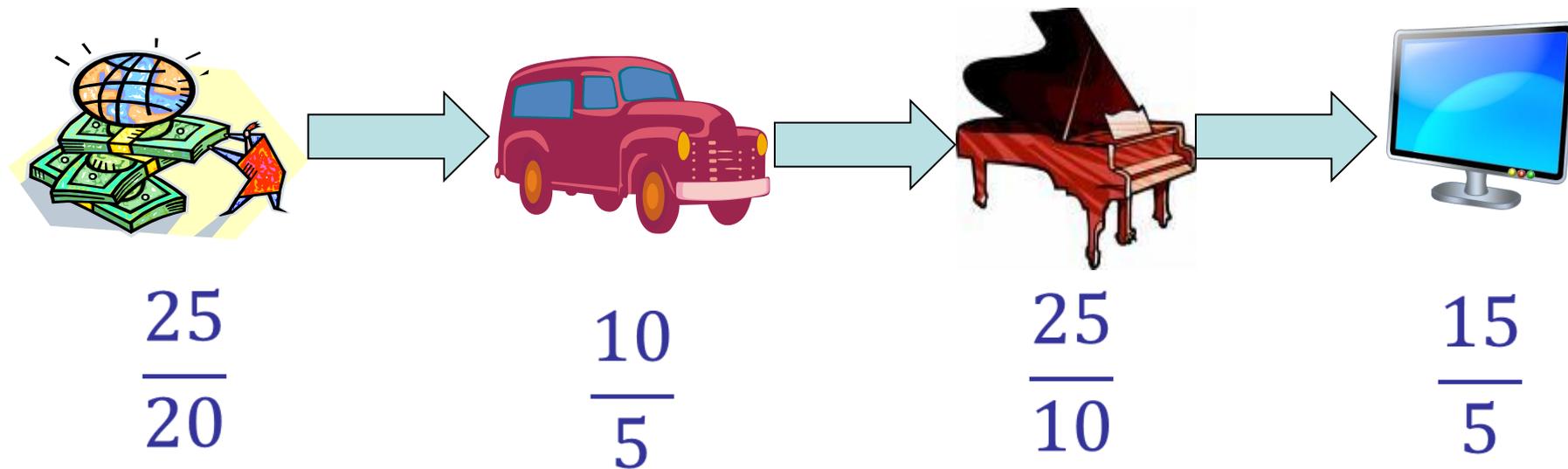
因為對靜香每點所得，大雄的所失最小。

例如，如果轉移電視到靜香，靜香每得一點，大雄需要降低總點數三點。

但是如果轉移汽車到靜香，靜香每得一點，大雄只需要降低總點數二點。

由於銀行存款的點數比最小，應先轉移它給靜香。

轉移項目的次序為(直到靜香的總點數大於大雄的總點數)



$60 + 20 > 75 - 25$ (靜香的總點數大於大雄的)

需要將此項目分割並分配給雙方!

「調整贏家法」 (Adjusted Winner Procedure)

設 x 為靜香分到銀行存款的比重， $1-x$ 為大雄分到銀行存款的比重。

轉移部分存款後，靜香得 $60 + 20x$ ，大雄得 $50 + 25(1 - x)$ 。

為保證雙方總點數相等，我們有

$$60 + 20x = 50 + 25(1 - x) = 75 - 25x$$

$$45x = 15$$

$$x = 1/3$$

$66\frac{2}{3}$

靜香

財物

$66\frac{2}{3}$

大雄

$\frac{1}{3}$



35

$\frac{2}{3}$



15

屋

25

銀行存款

鋼琴

25

電視

15

狗

10

車

10



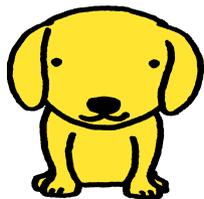
20

10

5

25

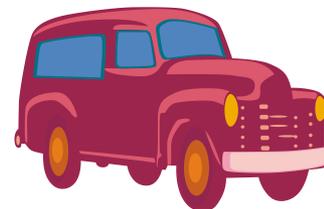
5



100

Total

100



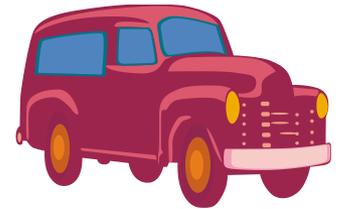
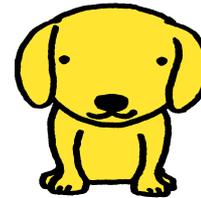
雙方各得到 $66\frac{2}{3}$ (>50)點，應該感到公平和不妒忌對方。

只需要分割一件財物。

離婚分財產



如何分割其他的財物？

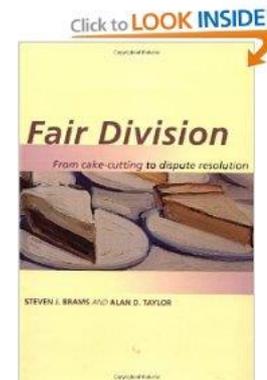


「調整贏家法」 (Adjusted Winner Procedure)

1996年由政治學家Steven Brams 和數學家Alan Taylor 提出並證明此方法所得的分配滿足下列三個條件：

- 1) 雙方得到相同的總點數。
- 2) 沒有一方願意放棄自己的分配，以換取對方的分配。
- 3) 沒有其他的分配可同時增加雙方的總點數。

Steven Brams and Alan Taylor, *Fair Division*,
Cambridge University Press, 1996.



「調整贏家法」 (Adjusted Winner Procedure)

- 1) 雙方得到相同的總點數。
- 3) 沒有其他的分配可同時增加雙方的總點數。



- 2) 沒有一方願意放棄自己的分配，以換取對方的分配。

證明: 假設2)是假的，則其中一人(A)想放棄自己的分配，以換取對方(B)的分配。故 A 的總點數應低於50。由 1) 知道 B 的總點數亦應低於50。

將A和B的分配交換，則A和B的總點數同時增加到大於50。這與 3) 矛盾。

「調整贏家法」 (Adjusted Winner Procedure)

其他應用:

1) 兩家公司的業務合併。

2) 領土主權糾紛。

SJ Brams, AD Taylor, A procedure for divorce settlements, *Conflict Resolution Quarterly*, 1996

DBH. Denoon, SJ Brams, Fair division: A new approach to Spratly Islands, *International Negotiation*, 1997

TG Massoud, Fair division, adjusted winner procedure (AW), and the Israeli-Palestinian conflict, *Journal of Conflict Resolution*, 2000

公司合併

香港地鐵 和九廣鐵路於2007年12月2日合併成香港鐵路有限公司（簡稱港鐵）。



香港地鐵

項目

九廣鐵路

10

名稱

5

10

總部

25

20

主席

20

35

CEO

20

25

裁員

30

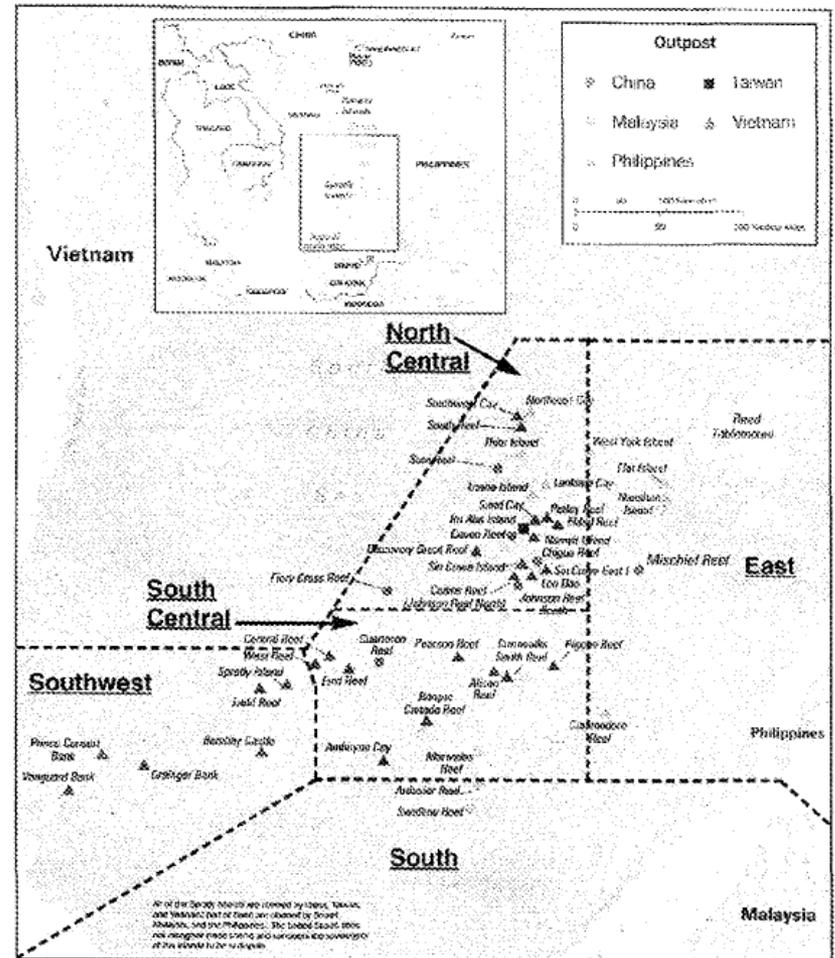
100

Total

100



南沙群島領土主權糾紛:中國 vs 東盟



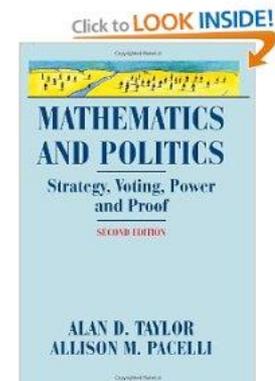
將南沙群島分為五個區部，再用「調整贏家法」來分配。

「調整贏家程序」 (Adjusted Winner Procedure)

當超過兩個人時，沒有方法所得的分配同時滿足下列三個條件：

- 1) 雙方得到相同的總點數。
- 2) 沒有一方願意放棄自己的分配，以換取對方的分配。
- 3) 沒有其他的分配可同時增加雙方的總點數。

Mathematics and Politics: Strategy, Voting, Power, and Proof by Alan D. Taylor and Allison M. Pacelli, Springer; **2nd edition** (2008) (Chapter 5 and 11).



擇偶條件

同時滿足下列條件:

- 1) 外表好
- 2) 事業心強
- 3) 專一
- 4) 有幽默感
- 5) 願意花時間陪我
- 6) 孝順
- 7)

數學好



Alfréd Rényi (1921-1970):

If I feel unhappy, I do mathematics to become happy.
If I am happy, I do mathematics to keep happy.



公平

自由



Thank You !