Sur

L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

de la forme

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= b_1 x_2 x_3 + b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1 x_2 \\
\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} &= c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_2
\end{aligned}$$

par des fonctions elliptiques.

Thèse

pour l'obtention du grade de docteur en philosophie de l'université royale Frédéric-Guillaume à Berlin

par

P A U L   H O Y E R

Examinateurs: Otto Mahly, candidat mathématicien
Otto Reinhardt, étudiant en philosophie
Max Wendt, étudiant en philosophie.

Berlin 1879.

Librairie royale de Carl Friese à Magdeburg.

Traduction Robert Conte, 29 février 1996

À son

MAÎTRE HONORÉ

Monsieur le

PROFESSEUR DOCTEUR WEIERSTRASS.

La première partie de ce travail concerne la recherche de la nature de l'intégrale d'un système différentiel de la forme ci-dessus, dans le cas de coefficients constants, et nous prouvons ici le théorème:

I. *Si les coefficients du système ci-dessus sont constants, il existe une intégrale qui ou bien a sa frontière à distance finie, ou bien consiste en trois séries uniformément convergentes.*

Nous croyons avoir construit l'élément qui représente le système de fonctions x_1, x_2, x_3 au voisinage d'un point t'. Les fonctions peuvent rester régulières au voisinage de t', où l'on peut les développer en puissances entières positives. D'après un théorème connu sur l'intégrale d'un système différentiel de la forme donnée, ou bien le disque de convergence s'étend à chacun des développements pour x_1, x_2, x_3 jusqu'à l'infini, ou bien il existe, sur la frontière du disque de convergence, au moins un point t'' au voisinage duquel l'une des trois fonctions est infinie. Nous voulons considérer ce dernier cas comme acceptable, donc exclure la convergence continue des séries pour x_1, x_2, x_3. Nous supposons plus loin que le point mentionné n'est pas un point frontière pour le système des fonctions x_1, x_2, x_3, ainsi nous voulons maintenant prouver qu'entre les coefficients du système différentiel satisfait par les trois fonctions il doit certainement exister une relation. Nous supposons pour cela que le système des coefficients (a, b, c) du système différentiel ci-dessus ne satisfait pas d'équations

$$\Delta = 0,\ a_1' = 0,\ b_2' = 0,\ c_3' = 0,\ a_1 = 0,\ b_2 = 0,\ c_3 = 0, \tag{1}$$

où Δ est le déterminant du système de coefficients (a, b, c), et a_1', b_2', c_3' sont les sous-déterminants correspondant à a_1, b_2, c_3. Alors à présent t'' ne doit pas être un point de la frontière, ainsi le système des fonctions x_1, x_2, x_3 se laisse représenter dans son voisinage par des séries de la forme suivante

$$\begin{aligned} x_1 =& A_1 u^{-n} + A_2 u^{-n+1} + A_3 u^{-n+2} \ \ldots \\ x_2 =& B_1 u^{-n} + B_2 u^{-n+1} + B_3 u^{-n+2} \ \ldots \\ x_3 =& C_1 u^{-n} + C_2 u^{-n+1} + C_3 u^{-n+2} \ \ldots \end{aligned}$$

où $u = [t - t'']^{\frac{1}{r}}$ désigne une racine $r-$ième de $t - t''$. Il s'ensuit

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{n}{r} A_1 u^{-n-r} - \frac{n-1}{r} A_2 u^{-n-r+1} - \frac{n-2}{r} A_3 u^{-n-r+2} - \ldots \qquad = \text{(A)}$$

et des séries similaires en résultent pour $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t, \mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t$, désignons-les par (B), (C). On en déduit

$$\begin{aligned} &a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = (a_1 B_1 C_1 + a_2 B_2 C_2 + a_3 B_3 C_3) u^{-2n} \\ &\quad + [a_1(B_1 C_2 + B_2 C_1) + a_2(C_1 A_2 + A_1 C_2) + a_3(A_1 B_2 + A_2 B_1)]\, u^{-2n+1} + \ldots = \text{(a)} \end{aligned}$$

Page 2

et des séries similaires s'ensuivent pour les développements des membres de gauche des deuxième et troisième équations dans le système différentiel considéré, désignons-les par (b), (c). Nous devons maintenant égaler les séries (A) et (a), (B) et (b), (C) et (c). Pour cela, comparons les coefficients de la plus haute puissance.

Comme l'une au moins des fonctions x_1, x_2, x_3 doit avoir un pôle en $u = 0$, on peut supposer qu'un au moins des coefficients A_1, B_1, C_1 est non nul, par exemple A_1, si bien que le coefficient du monôme de plus bas degré dans (A) est également non nul. Montrons que ceci est encore vrai pour (a). Dans le cas contraire nous aurions

$$\begin{aligned} 0 =& a_1 B_1 C_1 + b_2 C_1 A_1 + a_3 A_1 B_1 \text{ et également} \\ 0 =& b_1 B_1 C_1 + b_2 C_1 A_1 + b_3 A_1 B_1 \text{ et également} \\ 0 =& c_1 B_1 C_1 + c_2 C_1 A_1 + c_3 A_1 B_1 \text{ et également} \end{aligned}$$

d'où, puisque Δ n'est pas nul,

$$B_1 C_1 = 0,\ C_1 A_1 = 0,\ A_1 B_1 = 0,$$

et, comme de plus A_1 n'est pas nul,

$$C_1 = B_1 = 0.$$

Supposons maintenant que les coefficients de (a) soient tous nuls jusuqu' celui de $u^{-2n+k-1}$ inclus, et que ceux de x_2 et x_3 le soient galement jusqu'au rang u^{-n+k-1} inclus. Alors les coefficients de u^{-2n+k} dans (a),(b),(c) deviennent

$$A_1(a_2 C_{k+1} + a_3 B_{k+1}),\ A_1(b_2 C_{k+1} + b_3 B_{k+1}),\ A_1(c_2 C_{k+1} + c_3 B_{k+1}).$$

Mais puisque le premier coefficient de (A) est gal au premier de (a), et que l'on a $B_1 = C_1 = 0$,

$$b_2 C_{k+1} + b_3 B_{k+1} = 0,\ c_2 C_{k+1} + c_3 B_{k+1} = 0,$$

et de l puisque le dterminant a_1' n'est pas nul

$$B_{k+1} = 0,\ C_{k+1} = 0,$$

et donc

$$A_1(a_2 C_{k+1} + a_3 B_{k+1}) = 0$$

c'est--dire que le coeficient de u^{-2n+k} dans (a) est nul. Les hypothses conduisant ce rsultat seraient donc vraies dans le cas $k = 1$ si nous supposions que les premiers membres de (A) et de (a) ne coïncident pas. Elles seraient donc vraies pour tout k, et les coefficients de (a) devraient être nuls, ce qui est impossible puisque le premier coefficient de (a) doit être non nul. Les premiers membres de (A) et (a), (B) et (b), (C) et (c) doivent donc être gaux, et l'on obtient les quations

$$-n - r = -2n,\ n = r$$

$$\begin{aligned} -A_1 =& a_1 B_1 C_1 + a_2 C_1 A_1 + a_3 A_1 B_1, \\ -B_1 =& b_1 B_1 C_1 + b_2 C_1 A_1 + b_3 A_1 B_1, \\ -C_1 =& c_1 B_1 C_1 + c_2 C_1 A_1 + c_3 A_1 B_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Nous avons dduit ces quations sous l'hypothse que A_1 ...est non nul .... On se convainc aisment que la conclusion reste vraie ...si c'est B_1 ou C_1 qui est non nul, en remplaçant a_1' par b_2' ou par c_3' dans la dmonstration. Par l'hypothse que le systme des coefficients ne satisfait aucune des quations (1), on prouve aisment que la nullit d'une des quantits A_1, B_1, C_1 entraîne celle des deux autres si elles satisfont le systme (2). Donc A_1, B_1, C_1 sont tous non nuls et ceci, combin avec l'quation $n = r$, prouve la proposition

II. *Supposons que les coefficients du système différentiel ne satisfassent aucune des équations (1). Si en un point t'' l'une des fonctions x_1, x_2, x_3 solution du système devient infinie, les deux autres le deviennent également et le point t'' est un pôle simple pour les trois.*

Nous traitons prsent du systme (2). Pour cela ... posons

$$\frac{1}{A_1} = u_1, \ \frac{1}{B_1} = u_2, \ \frac{1}{C_1} = u_3.$$

Les équations vérifiées par u_1, u_2, u_3 sont

$$\begin{aligned} -u_2u_3 =& a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3, \\ -u_3u_1 =& b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3, \\ -u_1u_2 =& c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Résolvant les deux premires quations en u_1 et u_2, l'on obtient

$$\begin{aligned} u_1 =& u_3 \begin{pmatrix} a_2+u_3 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_1 & a_2+u_3 \\ b_1+u_3 & b_2 \end{pmatrix} \\ u_2 =& u_3 \begin{pmatrix} b_1+u_3 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_1 & a_2+u_3 \\ b_1+u_3 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

et en substituant les expressions dans la troisième on arrive, après quelques calculs et aprs avoir divis par u_3, l'quation suivante en u_3

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2+u_3 & a_3 \\ b_1+u_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2+u_3 \\ b_1+u_3 & b_2 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} a_2+u_3 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1+u_3 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

On peut mettre u_3 en facteur car $u_3 = 0$ conduit la solution vidente ... systme (3) ... $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Si u_3 est constamment nul, il suffit de supposer que le systme des coefficients (a, b, c) ne vrifie aucune des quations (1) pour en dduire que u_1 et u_2 sont nuls et que le triplet (u_1, u_2, u_3) est donc indpendant des coefficients (a, b, c). Pour un triplet (u_1, u_2, u_3) dans lequel aucune composante n'est infinie, u_3 vrifiera donc l'quation (5). Rciproquement, les formules (4) associent chaque racine de l'quation (5) un couple (u_1, u_2) tel que (u_1, u_2, u_3) satisfait au systme (3). Ceci pourrait ventuellemnt n'avoir pas lieu si et seulement si le dnominateur dans les formules (4) tait constamment nul pour une des racines de (5), ce qui est impossible car cette racine ne dpendrait que de a_1, b_1, a_2, b_2; mais, d'aprs l'quation (5), un des numrateurs de (4) devrait galement s'annuler et ce numrateur dpend aussi de a_3, b_3. Comme en gnral l'quation (5) n'a pas de racine double, ainsi qu'on peut s'en rendre compte en calculant le discriminant pour des valeurs particulires des coefficients (a, b, c), on peut affirmer que le nombre des triplets (u_1, u_2, u_3) solutions des quations (4) est exactement le degr de l'quation (5), c'est--dire quatre, et que les quantits u_3 solutions de (3) sont les racines de (5). Comme de plus dans un triplet (A_1, B_1, C_1) fonction des coefficients (a, b, c) et solution de l'quation (2) aucune des composantes n'est identiquement nulle, il s'ensuit que le nombre de ces triplets est quatre et que les valeurs de C_1 sont les solutions de l'quation rciproque de (5).

Revenons prsent l'identification des termes de plus haut degr dans les quations obtenues en galant les sries (A) et (a), (B) et (b), (C) et (c).

Page 4

Dans les dveloppements en srie de x_1, x_2, x_3, plusieurs des coefficients suivant A_1, B_1, C_1 peuvent être nuls et nous allons supposer que $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}$ est le premier triplet non nul. Dans ce cas, le premier triplet non nul des termes de (A),(B),(C) est

$$-\frac{r-k}{r}A_{k+1},\ -\frac{r-k}{r}B_{k+1},\ -\frac{r-k}{r}C_{k+1}$$

o l'on doit prendre soin de remplacer dans toutes les sries le nombre n par r. ...

$$a_1(B_1C_{k+1}+C_1B_{k+1})+a_2(C_1A_{k+1}+A_1C_{k+1})+a_3(A_1B_{k+1}+B_1A_{k+1})$$

...

$$\begin{aligned}
-\frac{r-k}{r}A_{k+1} &= a_1(B_1C_{k+1}+C_1B_{k+1})+a_2(C_1A_{k+1}+A_1C_{k+1})+a_3(A_1B_{k+1}+B_1A_{k+1})\\
-\frac{r-k}{r}B_{k+1} &= b_1(B_1C_{k+1}+C_1B_{k+1})+b_2(C_1A_{k+1}+A_1C_{k+1})+b_3(A_1B_{k+1}+B_1A_{k+1})\\
-\frac{r-k}{r}C_{k+1} &= c_1(B_1C_{k+1}+C_1B_{k+1})+c_2(C_1A_{k+1}+A_1C_{k+1})+c_3(A_1B_{k+1}+B_1A_{k+1})
\end{aligned}$$

ou crit autrement

$$(a_2C_1+a_3B_1-\frac{k-r}{r})A_{k+1}+(a_3A_1+a_1C_1)B_{k+1}+(a_1B_1+a_2A_1)C_{k+1}=0$$

$$(b_2C_1+b_3B_1)A_{k+1}+(b_3A_1+b_1C_1-\frac{k-r}{r})B_{k+1}+(b_1B_1+b_2A_1)C_{k+1}=0$$

$$(c_2C_1+c_3B_1)A_{k+1}+(c_3A_1+c_1C_1)B_{k+1}+(c_1B_1+c_2A_1-\frac{k-r}{r})C_{k+1}=0.$$

...

$$\begin{pmatrix} a_2C_1+a_3B_1-\frac{k-r}{r} & a_3A_1+a_1C_1 & a_1B_1+a_2A_1\\ b_2C_1+b_3B_1 & b_3A_1+b_1C_1-\frac{k-r}{r} & b_1B_1+b_2A_1\\ c_2C_1+c_3B_1 & c_3A_1+c_1C_1 & c_1B_1+c_2A_1-\frac{k-r}{r} \end{pmatrix}=0. \qquad (6)$$

...et posons pour $-\frac{k-r}{r}$ la lettre z [NDLR indices de Fuchs=$1-z=k/r, F(za,,b,c)=$ le membre de gauche de (6)]. ...

Page 5

$$x_1=\frac{A_1}{t-t'},\ x_2=\frac{B_1}{t-t'},\ x_3=\frac{C_1}{t-t'}, \qquad (7)$$

...

III. *Si le système différentiel proposé est intégrable en un système de fonctions qui ne sont pas de la forme (7), et qui ne sont pas représentables par trois séries uniformément convergentes, et qui n'ont pas de frontière à distance finie,*

soit $F(z, a, b, c)$ est nul pour une certaine valeur de z …,
soit les coefficients du système vérifient une des équations (1).
…

$$a_1 = 1,\ a_2 = t,\ a_3 = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = t,\ c_3 = 1,$$

…

$$\begin{pmatrix} 1 & t+u_3 \\ u_3 & 1 \end{pmatrix}^2 = 0$$

ou bien

$$(1 - u_3 t - u_3^2)^2 = 0.$$

…

$$1 - u_3 t - u_3^2 = 0.$$

L'quation rciproque est donc

$$C_1^2 - C_1 t - 1 = 0.$$

…

$$C_1 = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{t^2+4}).$$

Page 6

…

$$C_1' = \frac{t - \sqrt{t^2+4}}{2},\ C_1'' = \frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2},\ C_1''' = \frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2},\ C_1^{\mathrm{IV}} = \frac{t - \sqrt{t^2+4}}{2}.$$

…

$$u_1 + (t + u_3)u_2 = 0,\ u_3 u_1 + u_2 = 0,$$

… Cette quation est

$$u_1^2 u_3 = c_1 u_1 - u_1 u_3 + c_3 u_3,$$

donc

$$u_1^2 u_3 = -t u_1 u_3 + u_3$$
$$u_1^2 + t u_1 - 1 = 0.$$

…

$$\frac{1}{u_1} = A_1 = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}).$$

…

$$B_1 = -C_1 A_1,$$

… $C_1' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4})$ avec $A_1' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4})$, …

$$B_1' = -\frac{1}{2}(t^2 + 2 - t\sqrt{t^2+4}).$$

$\ldots C_1^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4})$ avec $A_1^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4})$, …

$$B_1^{\mathrm{IV}} = 1.$$

…

$$A_1' = \frac{t - \sqrt{t^2+4}}{2},\ A_1'' = \frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2},\ A_1''' = \frac{t - \sqrt{t^2+4}}{2},\ A_1^{\mathrm{IV}} = \frac{t + \sqrt{t^2+4}}{2},$$

…les combinaisons $C_1'A_1'; C_1''A_1''; C_1'''A_1'''; C_1^{\mathrm{IV}}A_1^{\mathrm{IV}}$ …

$$\begin{aligned}
&C_1' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\ A_1' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\ B_1' = -\frac{1}{2}(t^2 + 2 - t\sqrt{t^2+4}).\\
&C_1'' = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\ A_1'' = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\ B_1'' = -\frac{1}{2}(t^2 + 2 + t\sqrt{t^2+4}).\\
&C_1''' = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\ A_1''' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\ B_1''' = 1\\
&C_1^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}).A_1^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}), B_1^{\mathrm{IV}} = 1.
\end{aligned} \tag{8}$$

… $\frac{r-k}{r}z$ … $R(z, a, b, c, A_1, B_1, C_1)$ … $(z, 0, 0), (0, z, 0), (0, 0, z)$ …somme de vingt-sept dterminants …

Page 7

…

$$\begin{aligned}
&zA_1\left\{A_1\begin{pmatrix} b_3 & b_2\\ c_3 & c_2\end{pmatrix} + B_1\begin{pmatrix} a_3 & a_2\\ c_3 & c_2\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{pmatrix}\right\}\\
+&zB_1\left\{A_1\begin{pmatrix} b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{pmatrix} + B_1\begin{pmatrix} a_3 & a_1\\ c_3 & c_1\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{pmatrix}\right\}\\
+&zC_1\left\{A_1\begin{pmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{pmatrix} + B_1\begin{pmatrix} a_2 & a_1\\ c_2 & c_1\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} a_2 & a_1\\ b_2 & b_1\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

ou, …

$$zA_1(-A_1a_1' + B_1b_1' + C_1c_1') + zB_1(A_1a_2' - B_1b_2' + C_1c_2') + zC_1(A_1a_3' + B_1b_3' - C_1c_3').$$

…

$$-B_1C_1\Delta - 2A_1a_1',\ -C_1A_1\Delta - 2B_1b_2',\ -A_1B_1\Delta - 2C_1c_3',$$

…

$$-z\{3A_1B_1C_1\Delta + 2(A_1^2a_1' + B_1^2b_2' + C_1^2c_3')\}.$$

$\ldots R(z, a, b, c, A_1, B_1, C_1) \ldots$

$$\begin{aligned} R(z,a,b,c,A_1,B_1,C_1) =& z^3 + z^2\{(c_1+a_3)B_1 + (a_2+b_3)C_1 + (b_3+c_2)A_1\} \\ & - z\{3A_1B_1C_1\Delta + 2(a_1'A_1^2 + b_2'B_1^2 + c_3'C_1^2)\} + 2A_1B_1C_1\Delta. \end{aligned}$$

[NDLR = l'équation indicielle]

$\ldots A_1, B_1, C_1 \ldots R(z, a, b, c, A_1, B_1, C_1) = 0 \ldots A_1', B_1', C_1', A_1'', B_1'', C_1'' \ldots \sqrt{t^2+4}$ $\ldots A_1', B_1', C_1', A_1'', B_1'', C_1''$

$$\begin{aligned} & z^3 + t(t+\sqrt{t^2+4})z^2 + \frac{t^4 - 6 \pm t(t^2-2)\sqrt{t^2+4}}{2} z \\ & - \{t^4 + 4t^2 + 2 \pm t(t^2+2)\sqrt{t^2+4}\} = 0. \end{aligned}$$

$\ldots z = 2 \ldots$ On divise par $z - 2 \ldots$

$$z^2 + (t^2 + 2 \pm t\sqrt{t^2+4})z + \frac{t^4 + 4t^2 + 2 \pm t(t^2+2)\sqrt{t^2+4}}{2} = 0.$$

$\ldots$

$$z_1 = z_2 = -\frac{t^2 + 2 + t\sqrt{t^2+4}}{2}.$$

Pour le signe moins:

$$z_1' = z_2' = -\frac{t^2 + 2 - t\sqrt{t^2+4}}{2}.$$

Page 8

$\ldots A_1'''B_1'''C_1''', A_1^{\mathrm{IV}}B_1^{\mathrm{IV}}C_1^{\mathrm{IV}}$ dans $R(z, a, b, c, A_1, B_1, C_1) = 0 \ldots$

$$z^3 + t^2z^2 - (1+2t^2)z - 2 = 0.$$

$\ldots A_1'''B_1'''C_1''', A_1^{\mathrm{IV}}B_1^{\mathrm{IV}}C_1^{\mathrm{IV}} \ldots z = 2 \ldots$

$$z^2 + (t^2+2)z + 1 = 0,$$

$\ldots$

$$Z_1'' = -\frac{t^2 + 2 + t\sqrt{t^2+4}}{2}, \; Z_2'' = -\frac{t^2 + 2 - t\sqrt{t^2+4}}{2}.$$

$\ldots A_1'''B_1'''C_1''', A_1^{\mathrm{IV}}B_1^{\mathrm{IV}}C_1^{\mathrm{IV}}$

$\ldots$

$$2, \; -\frac{t^2 + 2 + t\sqrt{t^2+4}}{2}, \; -\frac{t^2 + 2 - t\sqrt{t^2+4}}{2},$$

et $\ldots R(z, a, b, c, A_1, B_1, C_1) = 0 \ldots A_1'B_1'C_1', A_1''B_1''C_1''. \ldots F(z, a, b, c) \ldots x_1, x_2, x_3$ $\ldots$ pour le systme de coefficients $(a, b, c) \ldots F(z, a, b, c) = 0$ o z est ou bien un entier naturel positif ou bien un nombre rationnel ngatif.

$\ldots a_1, b_2, c_3 \ldots$ quotient de fonctions $\sigma \ldots a_1, b_2, c_3 \ldots a_1^0, b_2^0, c_3^0 \ldots x_1', x_2', x_3' \ldots t'$ $\ldots$ coefficients $a, b, c \ldots |a_1| > a_1^0, |b_2| > b_2^0, |c_3| > c_3^0 \ldots$ fonctions x_1, x_2, x_3 pour $t = t' \ldots \xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_1 > |x_1'|, \xi_2 > |x_2'|, \xi_3 > |x_3'| \ldots$ convergence $\ldots x_1, x_2, x_3$ dans un voisinage de $t' \ldots$ pour les fonctions $x_1, x_2, x_3 \ldots$ pour $t = t' \ldots$ fonctions x_1, x_2, x_3

…quotients de σ …les fonctions x_1, x_2, x_3 …Le nombre de ces systmes de fonctions x_1, x_2, x_3 est infini, quand $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots x_1', x_2', x_3'$

Page 9

…quand les coefficients a, b, c …quand le systme des coefficients a, b, c ne vrifie aucune des quations (1), ou aucune des quations $f(z, a, b, c) = 0$, o z est ou bien un entier naturel positif ou bien un nombre rationnel ngatif.

En conclusion (?), pour que les fonctions x_1, x_2, x_3 soient uniformes (?), on doit avoir $r = 1$ et on obtient le rsultat:

[Vrifier] Si le systme diffrentiel propos est intgrable en un systme de fonctions uniformes avec un rayon de convergence infini, et que … alors on doit satisfaire ou bien une des quations (1), ou bien une des quations $F(-k, a, b, c) = 0$, o k est un entier positif.

[NDLR Bizarre. Dans le cas Darboux-Halphen, (1) est satisfaite.]

[NDLR Attention: ce nouveau k est l'ancien k augment de 1.]

[NDLR Ici semble se terminer le "test", ce qui suit ressortant à la suffisance. Donc pas trace de condition d'absence de log]

…une intgration par les trois fonctions $k_1 \frac{\sigma_1(t)}{\sigma(t)}, k_2 \frac{\sigma_2(t)}{\sigma(t)}, k_3 \frac{\sigma_3(t)}{\sigma(t)}$ (o k_1, k_2, k_3 sont des constantes certaines (?)), … $F(-1, a, b, c) = 0$. …

IV. *Si le système différentiel proposé est intégrable en un système de trois fonctions doublement périodiques, alors ses coefficients doivent vérifier ou bien l'une des équations (1), ou bien l'équation $F(-k, a, b, c) = 0,\ k = 1, \ldots, r-1$, où r est le plus petit nombre de pôles qui se trouvent dans les différents parallélogrammes des périodes communs aux trois fonctions.*

…que le systme des coefficients a, b, c satisfait une des quations (1), …du thorme II le systme de fonctions x_1, x_2, x_3 de laisse dvelopper au voisinage d'une singularit distance finie

$$
\begin{aligned}
x_1 =& A_1(t-t')^{-1} + A_2 + A_3(t-t') + \ldots \\
x_2 =& B_1(t-t')^{-1} + B_2 + B_3(t-t') + \ldots \\
x_3 =& C_1(t-t')^{-1} + C_2 + C_3(t-t') + \ldots,
\end{aligned} \tag{9}
$$

o A_1, B_1, C_1 sont de diffrence nulle (?). … A_2, B_2, C_2 … $F(0, a, b, c) = 0$ …Nous devrons donc supposer $A_2 = B_2 = C_2 = 0$.

…nuls jusqu' $A_{s+1}, B_{s+1}, C_{s+1}$ inclus, …pour la drive logarithmique $s-$ime de x_1 l'quation

$$
\frac{\mathrm{d}^s \lg x_1}{\mathrm{d}t^s} = F_1(t) + a_1 c_1^{s-1} \frac{x_2^s x_3}{x_1} + F_2(t), \tag{10}
$$

o $F_1(t), F_2(t)$ sont deux fonctions doublement priodiques de t … x_1, x_2, x_3 …paire de priodes $2\omega, 2\omega'$, …

Page 10

$$
\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg x_1}{\mathrm{d}t^{s+1}} = \bar{F}_1(t) + a_1 c_1^{s} \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} + \bar{F}_2(t),
$$

o $\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)$ sont des fonctions … F_1, F_2 … $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ … x_2 …priodes $2\omega, 2\omega'$ … $\beta_1^s + \beta_2^s + \ldots + \beta_r^s = 0$

Dans ce thorme une des fonctions x_1, x_2, x_3 …les fonctions x_1, x_2, x_3

…Appelons $2\omega_1, 2\omega_1'$ une paire de priodes de x_1, $2\omega_2, 2\omega_2'$ de x_2, $2\omega_3, 2\omega_3'$ de x_3.

$\ldots t', t'', \ldots, t^{(k)}$ [NDLR l'indice 1 tait erron] un systme $\ldots x_1 \ldots$ pour la paire de priodes $2\omega_1, 2\omega_1'$. Donc $t' + 2\omega_2$ est une singularit distance finie (?) pour x_2, donc aussi pour x_1, et ... avec un des points $t', t'', \ldots, t^{(k)}$. Il en est de même pour $t' + 4\omega_2, t' + 6\omega_2, \ldots$ Le nombre de points $t' + 2m\omega_2$, ... est infini ... du systme $t_1', t'', \ldots, t^{(k)}$ sont congrus $(\mathrm{mod}\ 2\omega_1, 2\omega_1')$. ...

$$t' + 2m\omega_2 \equiv t' + 2m'\omega_2 \ (\mathrm{mod}\ 2\omega_1, 2\omega_1'),$$

$$2(m - m')\omega_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2\omega_1, 2\omega_1').$$

C'est--dire $2(m - m')\omega_2$ est une priode de x_1. ... $2\omega_2$ ... priode de x_1. ... $2\omega_2'$ ... priode de x_1. ... x_1 et x_2 ... les trois fonctions sont toutes semblables (?).
$\ldots t_1', t'', \ldots, t^{(r)}$. [NDLR t_1' ou t'?] Le nombre r ... deux des trois fonctions x_1, x_2, x_3 deviennent nulles ...

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 0, \ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 0, \ \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = 0,$$

Page 11

...

$$R_1(x_1, x_2, x_3)\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + R_2(x_1, x_2, x_3)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + R_3(x_1, x_2, x_3)\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t},$$

o R_1, R_2, R_3 dsignent des fonctions entires (?) rationnelles, ... x_1 pour $t = t_1$ ... β_1, ν_1 ... x_2, x_3 pour $t = t_1$ ... L'quation

$$\left[\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right]_{t=t_1} = a_1\beta_1\nu_1,$$

... β_1, ν_1 ... aussi a_1 ... x_1 pour la valeur $t = t_1$ ... x_1 ... au point t_1 avec le nombre d'ordre 1 ... x_1 avec $t_1, t_2, \ldots, t_r$ ... $t_1 + t_2 + \ldots + t_r = t' + t'' + \ldots + t^{(r)}$ ... dans la thorie des fonctions elliptiques ... $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{(r)}$ ... $t_1, t_2, \ldots, t_{(r)}$ ... de x_2

... l'quation (10). ...

$$a_1 c_1^{s-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^s x_3}{x_1}\right)$$

...

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^s x_3}{x_1}\right) = x_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^s}{x_1}\right) + \frac{x_2^s}{x_1}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}.$$

... $x_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^s}{x_1}\right)$ au voisinage d'une singularit distance finie, soit t'. ... sur les systmes de coefficients dans les fonctions x_1, x_2, x_2 :

$$\begin{aligned} x_2^s =& (t - t')^{-s}\left\{B_1^s + K(t - t')^{s+1} + \ldots\right\} \\ \frac{x_2^s}{x_1} =& \frac{B_1^s}{A_1(t - t')^{s-1}} + K_1(t - t')^2 + \ldots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x_2^s}{x_1} =& -(s-1)\frac{B_1^s}{A_1(t - t')^s} + (t - t')? \end{aligned}$$

...

$$x_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^s}{x_1}\right) = -(s-1)\frac{B_1^s C_1}{A_1(t - t')^{s+1}} + P_1(t - t').$$

... $x_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^s}{x_1}\right)$

Page 12

$\ldots 2\omega, 2\omega' \ldots$ fonction $\wp \ldots$ avec $A_1^{(k)}, B_1^{(k)}, C_1^{(k)} \ldots$ le point $t^{(k)} \ldots$ systme de composantes $A_1, B_1, C_1 \ldots$

$$f(t) = (-1)^{s-1}(s-1)\sum_{k=1}^{r} \frac{B_1^{(k)^s} C_1^{(k)}}{s! A_1^{(k)}} \wp^{(s-1)}(t - t^{(k)})$$

$\ldots$ au point $t^{(k)} \ldots (s-1)\frac{B_1^{(k)^s} C_1^{(k)}}{A_1^{(k)}}(t-t')^{-s-1} \ldots$

$$x_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^s}{x_1}\right) + f(t) = f_1(t)$$

[NDLR exposant 3 remplac par s?] $\ldots \frac{x_2^s}{x_1}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}$.

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_2 :$$

par consquent

$$\frac{x_2^s}{x_1}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = c_1 \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} + (c_2 x_3 + c_3 x_2) x_2^s,$$

ou quand on suppose $\varphi(t) = (c_2 x_3 + c_3 x_2) x_2^s$:

$$\frac{x_2^s}{x_1}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = c_1 \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} + \varphi(t),$$

o $\varphi(t)$ dsigne une fonction priodique de t avec la paire de priodes $2\omega, 2\omega'$, $\ldots x_1$

$\ldots x_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^s}{x_1}\right) \ldots$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x_2^s x_3}{x_1} = f_1(t) + c_1 \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} + \varphi(t) - f(t),$$

$\ldots$ par diffrentiation de (10) $\ldots$

$$\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg x_1}{\mathrm{d}t^{s+1}} = F_1'(t) + a_1 c_1^{s-1} f_1(t) + a_1 c_1^s \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} + a_1 c_1^{s-1}(\varphi(t) - f(t)) + F_2'(t).$$

Ceci dfinit donc deux fonctions $F_1'(t) + a_1 c_1^{s-1} f_1(t) = \bar{F}_1(t)$ et $a_1 c_1^{s-1}(\varphi(t) - f(t)) + F_2'(t) = \bar{F}_2(t)$ $\ldots$ ont $2\omega, 2\omega'$ comme paire de priodes $\ldots x_1 \ldots$ l'quation

$$\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg x_1}{\mathrm{d}t^{s+1}} = \bar{F}_1(t) + a_1 c_1^s \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} + \bar{F}_2(t), \tag{11}$$

$\ldots$ l'autre une singularit de x_1. $\ldots \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} \ldots$ de x_1, soit t_1.

$\ldots$ les valeurs de $x_2, x_3 \ldots$ de x_1

$$\frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} = \frac{\beta_1^s}{a_1(t-t_1)} + P(t-t_1).$$

Page 13

…aux points $t_1, \ldots, t_r$ …la fonction σ …au point $t = 0$ …$2\omega, 2\omega'$

$$\sigma(t) = t \prod_w \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{\frac{1}{2}\frac{t^2}{w^2} + \frac{1}{w}}$$

o $w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$ et le produit s'tend sur toutes les valeurs entires positives et ngatives de ν et ν'. …

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{r} \beta_b^s \frac{\sigma'(t - t_k)}{\sigma(t - t_k)},$$

…la puissance la plus petite … $\frac{\beta_k^s}{t - t_k}$ …

$$\Psi_1(t) = \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} - \frac{1}{a_1}\Psi(t)$$

…aux points $t_1, \ldots, t_k$ …l'quation

$$\frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} = \Psi_1(t) + \frac{1}{a_1}\Psi(t)$$

la fonction $\frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1}$ se dcompose en une somme de deux fonctions, dont …$\Psi_1(t)$ …$(1/a_1)\Psi(t)$

On utilise cela dans l'quation (11), et l'on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg x_1}{\mathrm{d}t^{s+1}} = \left[\bar{F}_1(t) + c_1^s \Psi(t)\right] + \left[\bar{F}_2(t) + a_1 c_1^s \Psi_1(t)\right] + \bar{F}_2(t),$$

et ici $\bar{F}_1(t) + c_1^s\Psi(t)$ et $\bar{F}_2(t) + a_1 c_1^s \Psi_1(t)$ sont deux fonctions, dont la première …et dont la deuxime …

La fonction x_1 …une drive du logarithme d'une fonction similaire (?), donc la $(s+1)-$ime …soit $G(t) - H(t)$, …dont l'une $G(t)$ …l'autre $H(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg u_1}{\mathrm{d}t^{s+1}} = G(t), \ \frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg u_2}{\mathrm{d}t^{s+1}} = H(t),$$

…dont la premire u_1 …la deuxime u_2 …u_1, u_2

$$\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg P(t)}{\mathrm{d}t^{s+1}} = \bar{F}_1(t) + c_1^s \Psi(t), \tag{12}$$

…$P(t)$ …x_1 …x_1

Page 14

…$2\omega, 2\omega'$

$$x_1 = \frac{\sigma(t - t_1)}{\sigma(t - t')} \frac{\sigma(t - t_2)}{\sigma(t - t'')} \frac{\ldots}{\ldots} \frac{\sigma(t - t_r)}{\sigma(t - t^{(r)})} C,$$

où C désigne une constante. …$t_1 + t_2 + \ldots + t_r = t' + t'' + \ldots + t^{(r)}$ …z

$$z = C\sigma(t - t_1)\sigma(t - t_2)\ldots\sigma(t - t_r).$$

…z et $P(t)$ …le quotient $P(t)/z$ être une fonction E [NDLR entire], c'est--dire telle qu'elle peut se reprsenter sous la forme $e^{P_1(t)}$, o $P_1(t)$ est uniformment [NDLR abrviation de ?] convergente: Donc on a: $P(t) = ze^{P_1(t)}$. Or l'on a

$$\frac{\mathrm{d}^2 \lg z}{\mathrm{d}t^2} = -\wp(t-t_1) - \wp(t-t_2) - \ldots - \wp(t-t_r)$$

une fonction doublement priodique avec la paire de priodes $2\omega, 2\omega'$, … $\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg z}{\mathrm{d}t^{s+1}}$, … $s \geq 1$ … $\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg P(t)}{\mathrm{d}t^{s+1}} = \frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg z}{\mathrm{d}t^{s+1}} + \frac{\mathrm{d}^{s+1} P_1(t)}{\mathrm{d}t^{s+1}}$ dans l'quation (12) …

$$\frac{\mathrm{d}^{s+1} P_1(t)}{\mathrm{d}t^{s+1}} + \frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg z}{\mathrm{d}t^{s+1}} = \bar{F}_1(t) + c_1^s \Psi(t),$$

$\frac{\mathrm{d}^{s+1} P_1(t)}{\mathrm{d}t^{s+1}}$ et $c_1^s \Psi(t)$ sont des fonctions uniques non priodiques. … $\Psi(t)$ … $\Psi'(t)$ … $\frac{\mathrm{d}^{s+2} P_1(t)}{\mathrm{d}t^{s+2}}$ … $\frac{\mathrm{d}^{s+2} P_1(t)}{\mathrm{d}t^{s+2}}$

$$\frac{\mathrm{d}^{s+2} P_1(t)}{\mathrm{d}t^{s+2}} = k,$$
$$\frac{\mathrm{d}^{s+1} P_1(t)}{\mathrm{d}t^{s+1}} = kt + k'.$$

…

$$\frac{\mathrm{d}^{s+1} \lg z}{\mathrm{d}t^{s+1}} = \bar{F}_1(t) + c_1^s \Psi(t) - kt - k',$$

…

$$c_1^s \Psi(t) - kt$$

être doublement priodique …

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)},\ \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}$$

…de t … $2\omega\Psi(t)$ … $2\eta \sum_{k=1}^r \beta_k^s$, … $2\omega'$

Page 15

… $2\eta' \sum_{k=1}^r \beta_k^s$. … $c_1^s \Psi(t) - kt$ … $2\eta c_1^s \sum_{k=1}^r \beta_k^s - 2k\omega, 2\eta' c_1^s \sum_{k=1}^r \beta_k^s - 2k\omega'$; …

$$2\eta c_1^s \sum_{k=1}^r \beta_k^s - 2k\omega = 0$$
$$2\eta' c_1^s \sum_{k=1}^r \beta_k^s - 2k\omega' = 0.$$

Cette quation a, puisque le dterminant $2\eta\omega' - 2\eta'\omega + \pi i$ est diffrent de zro, …

$$c_1^s \sum_{k=1}^r \beta_k^s = 0,\ k = 0,$$

…puisque c_1 doit être diffrent de zro:

$$\sum_{k=1}^r \beta_k^s = 0. \tag{13}$$

...thorme IV ...x_1, ainsi on obtient une quation qui a la forme de l'quation (10) quand on y substitue $s = 1$. Or, puisque le systme de coefficients A_2, B_2, C_2 s'annule, ...l'quation (10) pour le cas $s = 2$, de même que l'quation (13) pour $s = 1$. ...$A_3 = B_3 = C_3 = 0$ ...l'quation (10) pour $s = 1$, l'quation (13) pour $s = 2$. ...que l'annulation du systme de coefficients $A_3 = B_3 = C_3 = 0, A_4 = B_4 = C_4 = 0, \ldots, A_{r+1}, B_{r+1}, C_{r+1}$ dans (9) ...l'quation (13) pour $s = 1, 2, \ldots, r$ ...$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$ ...$A_3 = B_3 = C_3 = 0, \ldots, A_{r+1}, B_{r+1}, C_{r+1}$ dans (9) ...l'quation (6) ...pour $r = 1$ ...$k = 2, 3, \ldots, r$, ou on doit vrifier l'quation $F(-k, a, b, c) = 0$ pour une des valeurs $k = 1, 2, \ldots, r - 1$.

...que c_1 ne soit pas nul. ...a_1, b_2, c_3 ...x_1, x_2, x_3 ...un nouveau systme x_1', x_2', x_3' ...a_1, b_2, c_3 ...$F(-k, a, b, c) = 0$ ...A_1, B_1, C_1 ...Le thorme IV ...

...et nous cherchons ici les fonctions elliptiques de degrs deux et quatre ...Sur le systme de coefficients (a, b, c)

Page 16

Par consquent nous nous posons maintenant la question: Comment doit être constitu un systme de trois fonctions elliptiques du deuxime degr pour satisfaire notre systme difrentiel? ...t', t'' ...A_1', B_1', C_1' ...les coefficients de $(t - t')$ ...dans le voisinage de t'' avec A_1'', B_1'', C_1'',

$$A_1' + A_1'' = 0,\ B_1' + B_1'' = 0,\ C_1' + C_1'' = 0.$$

...Ces quations nous conduisent ...A_1', B_1', C_1' ...A_1'', B_1'', C_1'' ...l'quation (2)

$$\begin{aligned} -A_1' &= a_1 B_1' C_1' + a_2 C_1' A_1' + a_3 A_1' B_1', \\ -A_1'' &= a_1 B_1'' C_1'' + a_2 C_1'' A_1'' + a_3 A_1'' B_1'', \end{aligned}$$

...$A_1' = -A_1'',\ B_1' = -B_1'',\ C_1' = -C_1''$

$$\begin{aligned} -A_1' &= a_1 B_1' C_1' + a_2 C_1' A_1' + a_3 A_1' B_1', \\ +A_1' &= a_1 B_1'' C_1'' + a_2 C_1'' A_1'' + a_3 A_1'' B_1'', \end{aligned}$$

[NDLR $-A_1$ corrig en $-A_1'$, premire quation, membre de gauche] on doit donc avoir

$$A_1' = -A_1'$$

ce qui, puisque A_1' est diffrent de zro, ne peut être le cas. ...le thorme

V. *Trois fonctions elliptiques du deuxième degré qui ont les mêmes périodes ne peuvent être solutions du système proposé que s'il n'existe aucune relation (1) entre les coefficients.*

...x_1, x_2, x_3 ...x_1, x_2 ...$2\omega_1, 2\omega_1'$ ...de x_1, ...$2\omega_2, 2\omega_2'$ ...de x_2, et t', t'' ...de x_1 ...qu'une des priodes de x_2 ne peut être priode de x_1. ...priodes $2\omega_2, 2\omega_2'$ priodes de x_1 ...de x_1 ...quand t', t'' ...non congrus (mod $2\omega_1, 2\omega_2'$ [NDLR erreur]) ...cette paire de priodes $2\omega_2, 2\omega_2', t', t''$ ...de x_1, ...t', t'' ...de x_2 ...de trois fonctions congrues (mod $2\omega_2, 2\omega_2'$) ...avec t', ou avec t''. ...Mais une paire de priodes d'une fonction de degr r ...r points ...une paire de priodes fondamentales $2\omega_2, 2\omega_2'$ ...de x_1 ...et x_1, x_2 ...$2\omega_2, 2\omega_2'$ ne soient pas priodes de x_1,

Page 17

...$2\omega_2$. ...$t' + 2\omega_2$ ...de x_2 ...de x_1 ...$t' + 2\omega_2$ ...avec t' ou t'' (mod $2\omega_1, 2\omega_1'$) ...ce point n'est pas congru t' ...ainsi on a

$$t' + 2\omega_2 \equiv t'' \ (\mathrm{mod}\ 2\omega_1, 2\omega_1').$$

$\dots t' + 4\omega_2$ congru l'un des points t', t'' (mod $2\omega_1, 2\omega_1'$) et puisque ce point n'est pas congru t'', $\dots 2\omega_2$ priode de x_1 $\dots$

$$t' + 4\omega_2 \equiv t' \;(\text{mod } 2\omega_1, 2\omega_1'),$$

ou $4\omega_2$ est une priode de x_1. $\dots$

$$t'' - t' \equiv 2\omega_2 \;(\text{mod } 2\omega_1, 2\omega_1'),$$

d'o le couple

$$4\omega_2 \equiv 0 \;(\text{mod } 2\omega_1, 2\omega_1').$$

$\dots 4\omega_2$ est une priode de x_1,

$\dots 2\omega_1, 2\omega_1'$ $\dots t' + \omega_1, t' + \omega_1 + \omega_1', t' + \omega_1'$ $\dots t' + \omega_1$ ou $t' + \omega_1'$ $\dots 2\omega_1, 2(\omega_1 + \omega_1')$ $\dots t' + \omega_1'$ $\dots \omega$ et ω'

$$2\omega = 2\omega_1, \;\; 2\omega' = \omega_1',$$

la paire de priodes de F_1 est $2\omega, 4\omega'$ $\dots$la coordonne relle dans $\frac{\omega'}{\omega?}$ [NDLR illisible] est de signe positif, $\dots -2\omega_1, 2\omega_1'$ $\dots F_2(t)$ une fonction doublement priodique du deuxime degr $\dots 2\Omega, 4\Omega'$ $\dots t' + 2\Omega'$ $\dots t' + 2\omega'$ $\dots$est un point distance finie de F_1 et donc aussi de F_2. $\dots t' + 2\Omega'$ (mod $2\Omega, 4\Omega'$) [NDLR indice 1 corrig].

Page 18

Ceci s'crit

$$t' + 2\omega' \equiv t' \;(\text{mod } 2\Omega, 4\Omega').$$

Donc

$$2\omega' \equiv 0 \;(\text{mod } 2\Omega, 4\Omega'),$$

ou encore $2\omega'$ est une priode de F_2. $\dots t' + 2\omega \equiv t'$ (mod $2\Omega, 4\Omega'$) $\dots 2\omega, 2\omega'$ $\dots$

$$t' + 2\omega \equiv t' + 2\Omega' \;(\text{mod } 2\Omega, 4\Omega') \text{ [NDLR un modulo corrig]}$$
$$2\omega \equiv 2\Omega', \;\; 4\omega \equiv 4\Omega' \;(\text{mod } 2\Omega, 4\Omega')$$

c'est--dire 4ω est une priode de F_2. $\dots t' + 2\omega' \equiv t'$ (mod $2\Omega, 4\Omega'$) $\dots 2\omega', 4\omega$ est une paire de priodes de F_2 $\dots$est aussi une paire de priodes fondamentales de F_2.

$$t' + 2\omega' \equiv t' + 2\Omega' \;(\text{mod } 2\Omega, 4\Omega').$$

$\dots$

$$4\omega' \equiv 4\Omega' \;(\text{mod } 2\Omega, 4\Omega'),$$

c'est--dire $4\omega'$ est une priode de F_2. $\dots t' + 2\omega$ $\dots$congru t' ou $t' + 2\Omega'$. Dans le premier cas on obtient que 2ω est aussi priode de F_2, la fonction F_2 a donc aussi la paire de priodes $2\omega, 4\omega'$, $\dots F_1, F_2$

$$t' + 2\omega' \equiv t' + 2\Omega',$$

$\dots$additionne

$$t' + 2\omega' \equiv t' + 2\Omega'$$

$$2t' + 2(\omega + \omega') \equiv 2t' + 4\Omega' \;(\text{mod } 2\Omega, 4\Omega'),$$
$$2(\omega + \omega') \equiv 4\Omega' \;(\text{mod } 2\Omega, 4\Omega'),$$

c'est--dire $2(\omega+\omega')$ est priode de F_2, $\ldots 4\omega', 2(\omega+\omega')$ aussi deux priodes de $F_2 \ldots$ pour la fonction $F_2(t) \ldots 2\omega', 4\omega$ ou $2(\omega+\omega'), 4\omega'$.

Donc nous pouvons comprendre sous x_1 la fonction $F_1(t)$, ...des fonctions x_2, x_3 ...une fonction similaire $F_2(t)$ ...Les fonctions x_1, x_2, x_3 ...deux des fonctions x_1, x_2, x_3 $\ldots 2\omega, 4\omega'; 2(\omega+\omega'), 4\omega'; 2\omega', 4\omega, \ldots \omega, \omega'$ ...une paire de priodes fondamentales $2\omega, 4\omega'$ de $x_1 \ldots t'$ une singularit distance finie de $x_1 \ldots t' + 2\omega' \ldots$ la fonction $\sigma(t) \ldots$

$$\sigma_1(t) = \frac{\sigma(t+\omega)}{\sigma(\omega)} e^{-\eta\omega},\ \sigma_2(t) = \frac{\sigma(t+\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')} e^{-(\eta+\eta')\omega},\ \sigma_3(t) = \frac{\sigma(t+\omega')}{\sigma(\omega')} e^{-\eta'\omega'},$$

[NDLR ω corrig en ω' dans la dernire exponentielle]
...des trois fonctions $\frac{\sigma_1(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sigma_2(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sigma_3(t)}{\sigma(t)}$ ...rsultat:

Celles des trois fonctions $\frac{\sigma_1(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sigma_2(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sigma_3(t)}{\sigma(t)}$ ...

Page 19

Par une fonction elliptique du deuxime degr, ...fonction $\frac{\sigma_\lambda(t)}{\sigma(t)}$ [NDLR λ corrig en indice] ...au point $t' \ldots 2\omega, 2\omega'$ ...de la forme $\frac{\sigma_\lambda(t-t')}{\sigma(t-t')} + C\lambda'$. ...les fonctions x_1, x_2, x_3 ...les fonctions $C_1\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_1', C_2\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_2', C_3\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_3'$ ... * ...que les quantits C_1', C_2', C_3' doivent être gales zro. ...

$$x_1 = C_1\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_1',\ x_2 = C_2\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_2',\ x_3 = C_3\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_3'.$$

...les indices des fonctions x_2, x_3 ...fonctions $\frac{\sigma_2}{\sigma}, \frac{\sigma_3}{\sigma}$ $\ldots x_2, x_3 \ldots$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = C_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')} = -C_1\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')} = -C_1\frac{(x_2-C_2')(x_3-C_3')}{C_2C_3}$$

et ce doit donc être

$$-C_1\frac{(x_2-C_2')(x_3-C_3')}{C_2C_3} = a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2.$$

$\ldots x_1, x_2, x_3 \ldots C_1' = C_2' = C_3' = 0 \ldots x_2, x_3$ ...une des fonctions x_1, x_2, x_3, soit x_2 dpendante de x_1, x_3 ...des trois fonctions x_1, x_2, x_3 ...des quotients de fonctions σ ...deux des trois fonctions $\frac{\sigma_1}{\sigma}, \frac{\sigma_2}{\sigma}, \frac{\sigma_3}{\sigma}$ $\ldots t' \ldots t'$ ...les constantes C_1', C_2', C_3' doivent être nulles $\ldots a_1, b_2, c_3. \ldots x_1, x_2, x_3$ ...quotients de fonctions σ

Page 20

...deux des trois fonctions $x_1, x_2, x_3 \ldots x_1, x_2 \ldots x_1, x_2, x_3 \ldots \omega, \omega' \ldots 2\omega, 4\omega'$ une paire de priodes fondamentales de x_1, et $t' + 2\omega$ est une des singularits distance finie de $x_1 \ldots \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$x_1 = C_1\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_1',\ x_2 = C_2\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_2',$$

* La fonction $x_1 \ldots C_1\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')} + C_1' \ldots \omega, \omega' \ldots$

$\ldots x_3$ doit être une des deux fonctions

$$C_2\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_2',\ C_3\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_3'.$$

$\ldots$

$$x_3=C_3\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_3'.$$

$\ldots \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \ldots x_1, x_2, x_3 \ldots \frac{\sigma_1}{\sigma}, \frac{\sigma_3}{\sigma} \ldots \frac{\sigma_1}{\sigma}, \frac{\sigma_3}{\sigma} \ldots \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \ldots \frac{\sigma_2}{\sigma}$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-C_1\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')}.$$

$\ldots x_3=C_2\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_2'$ [NDLR x_3?] $\ldots \frac{\sigma_1}{\sigma}, \frac{\sigma_2}{\sigma} \ldots \frac{\sigma_3}{\sigma}$ ... deux des trois fonctions x_1, x_2, x_3
... thorme V, la vracit du thorme:

Trois fonctions elliptiques de degr deux peuvent satisfaire notre systme diffrentiel, dans lequel les coefficients ne satisfont aucune des quations (1), quand elles constituent un systme de fonctions de la forme

$$C_\lambda\frac{\sigma_\lambda(t-t')}{\sigma(t-t')},\ C_\mu\frac{\sigma_\mu(t-t')}{\sigma(t-t')},\ C_\nu\frac{\sigma_\nu(t-t')}{\sigma(t-t')},$$

o deux quelconques des indices ne peuvent pas être gaux.

$\ldots 4\omega, 4\omega' \ldots$

Page 21

$\ldots t', t'+2\omega, t'+2(\omega+\omega')$. ... trois fonctions elliptiques du quatrime degr
$\ldots 2\omega, 2\omega'$ ... fonction $\sigma(t) \ldots t, t', t'', t''', t^{\mathrm{IV}}, \ldots$ les fonctions x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned}
x_1 =&K_1+\sum_{\gamma=1}^{4}A_1^{(\gamma)}\frac{\sigma'(t-t^{(\gamma)})}{\sigma(t-t^{(\gamma)})}\\
x_2 =&K_2+\sum_{\gamma=1}^{4}B_1^{(\gamma)}\frac{\sigma'(t-t^{(\gamma)})}{\sigma(t-t^{(\gamma)})}\\
x_3 =&K_3+\sum_{\gamma=1}^{4}C_1^{(\gamma)}\frac{\sigma'(t-t^{(\gamma)})}{\sigma(t-t^{(\gamma)})}
\end{aligned}$$

o entre $A_1^{(\gamma)}, B_1^{(\gamma)}, C_1^{(\gamma)}$ doivent avoir lieu les relations

$$\sum_{\gamma=1}^{4}A_1^{(\gamma)}=0,\ \sum_{\gamma=1}^{4}B_1^{(\gamma)}=0,\ \sum_{\gamma=1}^{4}C_1^{(\gamma)}=0, \tag{14}$$

$\ldots A_1^{(\gamma)}, B_1^{(\gamma)}, C_1^{(\gamma)}$ ... un parmi quatre des coefficients a, b, c ... l'quation (3) ... K_1, K_2, K_3
$\ldots A_2, B_2, C_2$ ... (9) ... sur le systme des coefficients $a, b, c \ldots t'', t''', t^{\mathrm{IV}}, \ldots \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$

$$\begin{aligned}
&K_1+A_1''\frac{\sigma'(t'-t'')}{\sigma(t'-t'')}+A_1'''\frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t''')}+A_1^{(\mathrm{IV})}\frac{\sigma'(t'-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t'-t^{(\mathrm{IV})})}=0\\
&K_1+A_1'\frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')}+A_1'''\frac{\sigma'(t''-t''')}{\sigma(t''-t''')}+A_1^{(\mathrm{IV})}\frac{\sigma'(t''-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t''-t^{(\mathrm{IV})})}=0\\
&K_1+A_1'\frac{\sigma'(t'''-t')}{\sigma(t'''-t')}+A_1''\frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}+A_1^{(\mathrm{IV})}\frac{\sigma'(t'''-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t'''-t^{(\mathrm{IV})})}=0 \qquad (15)\\
&K_1+A_1'\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t')}+A_1''\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t'')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t'')}+A_1'''\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}=0
\end{aligned}$$

$\ldots x_2, x_3 \ldots A \ldots B, C \ldots K_1 \ldots K_2, K_3$.

Dans le systme d'quations (15) …

$$(A_1''+A_1')\frac{\sigma'(t'-t'')}{\sigma(t'-t'')}+A_1'''\left\{\frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t''')}+\frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}\right\}+A_1^{(\mathrm{IV})}\left\{\frac{\sigma'(t'-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t'-t^{(\mathrm{IV})})}+\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t'')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t'')}\right\}=0$$

$\ldots A_1' + A_1'' = -A_1''' - A_1^{(\mathrm{IV})}, \ldots$

$$\begin{aligned}
&A_1'''\left\{\frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t''')}+\frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}+\frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')}\right\}\\
&+A_1^{(\mathrm{IV})}\left\{\frac{\sigma'(t'-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t'-t^{(\mathrm{IV})})}+\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t'')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t'')}+\frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')}\right\}=0,\\
&A_1'\left\{\frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')}+\frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t''')}+\frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}\right\}\\
&+A_1^{(\mathrm{IV})}\left\{\frac{\sigma'(t''-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t''-t^{(\mathrm{IV})})}+\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}+\frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}\right\}=0, \qquad (16)\\
&A_1'\left\{\frac{\sigma'(t'''-t')}{\sigma(t'''-t')}+\frac{\sigma'(t'-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t'-t^{(\mathrm{IV})})}+\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}\right\}\\
&+A_1''\left\{\frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}+\frac{\sigma'(t''-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t''-t^{(\mathrm{IV})})}+\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}\right\}=0.
\end{aligned}$$

… cette quation (6) avec l'quation (16) ensemble … les relations suivantes doivent être vrifies:

$$\frac{A_1'''}{A_1^{(\mathrm{IV})}}=\frac{B_1'''}{B_1^{(\mathrm{IV})}}=\frac{C_1'''}{C_1^{(\mathrm{IV})}}$$
$$\frac{A_1^{(\mathrm{IV})}}{A_1'}=\frac{B_1^{(\mathrm{IV})}}{B_1'}=\frac{C_1^{(\mathrm{IV})}}{C_1'}$$
$$\frac{A_1'}{A_1''}=\frac{B_1'}{B_1''}=\frac{C_1'}{C_1''}$$

$\ldots A_1^{(k)}, B_1^{(k)}, C_1^{(k)}$ … les quations (2) … $A_1^{(k)}, B_1^{(k)}, C_1^{(k)} \ldots A_1^{(s)}, B_1^{(s)}, C_1^{(s)}$ … deux systmes de valeurs vrifiant les quations (2)

$$A_1^{(s)}=kA_1^{(k)},\ B_1^{(s)}=kB_1^{(k)},\ C_1^{(s)}=kC_1^{(k)}$$

…

$$\begin{aligned}
-A_1^{(k)}&=a_1B_1^{(k)}C_1^{(k)}+a_2C_1^{(k)}A_1^{(k)}+a_3A_1^{(k)}B_1^{(k)}\\
-A_1^{(s)}&=k^2\left\{a_1B_1^{(k)}C_1^{(k)}+a_2C_1^{(k)}A_1^{(k)}+a_3A_1^{(k)}B_1^{(k)}\right\}
\end{aligned}$$

Ceci implique

$$A_1^{(s)}=k^2A_1^{(k)}$$

et galement

$$A_1^{(s)}=kA_1^{(k)}$$

par conséquent $k = 1$, si bien que les systmes de valeurs $A_1, B_1, C_1,\ A_1, B_1, C_1$
...

Page 23

$2\omega, 2\omega' \ldots A_1', B_1', C_1', \ldots A_1'', B_1'', C_1'', \ldots A_1''', B_1''', C_1''', \ldots A_1^{(\mathrm{IV})}, B_1^{(\mathrm{IV})}, C_1^{(\mathrm{IV})}$

$$\begin{aligned}
A_1''' &= A_1^{(\mathrm{IV})} = A_1' = A_1'',\\
B_1''' &= B_1^{(\mathrm{IV})} = B_1' = B_1'',\\
C_1''' &= C_1^{(\mathrm{IV})} = C_1' = C_1'',
\end{aligned}$$

...avec les relations (14). ...dans les quations (15) ...

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t''')} + \frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')} + \frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')} = 0,\\
&\frac{\sigma'(t''-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t''-t^{(\mathrm{IV})})} + \frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t''')} + \frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')} = 0,\\
&\frac{\sigma'(t'''-t')}{\sigma(t'''-t')} + \frac{\sigma'(t'-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t'-t^{(\mathrm{IV})})} + \frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t''')}\\
&\frac{\sigma'(t^{(\mathrm{IV})}-t'')}{\sigma(t^{(\mathrm{IV})}-t'')} + \frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')} + \frac{\sigma'(t'-t^{(\mathrm{IV})})}{\sigma(t'-t^{(\mathrm{IV})})} = 0.
\end{aligned}$$

Chacune de ces trois quations est une consquence de trois autres quations, $\ldots t'', t''', t^{(\mathrm{IV})}$ $\ldots t'' = t' + t_1, t''' = t' + t_2, t^{(\mathrm{IV})} = t' + t_3$. $\ldots t_1, t_2, t_3$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma'(t_2-t_3)}{\sigma(t_2-t_3)} &= \frac{\sigma'(t_2)}{\sigma(t_2)} - \frac{\sigma'(t_3)}{\sigma(t_3)},\\
\frac{\sigma'(t_3-t_1)}{\sigma(t_3-t_1)} &= \frac{\sigma'(t_3)}{\sigma(t_3)} - \frac{\sigma'(t_1)}{\sigma(t_1)},\\
\frac{\sigma'(t_1-t_2)}{\sigma(t_1-t_2)} &= \frac{\sigma'(t_1)}{\sigma(t_1)} - \frac{\sigma'(t_2)}{\sigma(t_2)},
\end{aligned} \tag{17}$$

[NDLR criture change pour respecter la permutation circulaire]

En consquence des formules

$$\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)} + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u)+\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)},$$

ces quations sont identiques

$$\frac{\wp'(t_2)+\wp'(t_3)}{\wp(t_2)-\wp(t_3)} = 0,\ \ \frac{\wp'(t_3)+\wp'(t_1)}{\wp(t_3)-\wp(t_1)} = 0,\ \ \frac{\wp'(t_1)+\wp'(t_2)}{\wp(t_1)-\wp(t_2)} = 0.$$

$\ldots \wp'(t_2) + \wp'(t_3) = 0, \wp'(t_3) + \wp'(t_1) = 0, \wp'(t_1) + \wp'(t_2) = 0$. ...soustrayant la seconde de la troisime $\wp'(t_2) - \wp'(t_3) = 0$, ...avec $\wp'(t_2) + \wp'(t_3) = 0$, $\ldots \wp'(t_2) = 0, \wp'(t_3) = 0, \ldots \wp'(t_1) = 0, \ldots$

$$t'' = t' + \omega,\ \ t''' = t' + \omega + \omega', t^{(\mathrm{IV})} = t' + \omega',$$

...

Page 24

$\ldots \omega, \omega+\omega', \omega' \ldots t'', t''', t^{(\mathrm{IV})} \ldots$ les constantes $K_1, K_2, K_3 \ldots$ les quations (15) $\ldots K_1, K_2, K_3$
$\ldots t'', t''', t^{(\mathrm{IV})} \ldots$ les fonctions $x_1, x_2, x_3 \ldots$ les relations (14), ainsi que les formules (18),
$\ldots$ pour x_1, x_2, x_3 dans le forme suivante

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\wp'(t-t')}{2}\left\{\frac{A_1''}{\wp(t-t')-e_1}+\frac{A_1'''}{\wp(t-t')-e_2}+\frac{A_1^{(\mathrm{IV})}}{\wp(t-t')-e_3}\right\},\\
x_2 &= \frac{\wp'(t-t')}{2}\left\{\frac{B_1''}{\wp(t-t')-e_1}+\frac{B_1'''}{\wp(t-t')-e_2}+\frac{B_1^{(\mathrm{IV})}}{\wp(t-t')-e_3}\right\},\qquad (19)\\
x_3 &= \frac{\wp'(t-t')}{2}\left\{\frac{C_1''}{\wp(t-t')-e_1}+\frac{C_1'''}{\wp(t-t')-e_2}+\frac{C_1^{(\mathrm{IV})}}{\wp(t-t')-e_3}\right\},
\end{aligned}$$

En outre e_1, e_2, e_3 ont la signification $e_1 = \wp(\omega), e_2 = \wp(\omega+\omega'), e_3 = \wp(\omega')$, et il existe alors entre e_1, e_2, e_3 la relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0. \qquad (20)$$

Si nous avions $\omega, \omega+\omega' \ldots t'', t''', t^{(\mathrm{IV})} \ldots e_1, e_2, e_3 \ldots$ quotients de $\sigma \ldots a_1, b_2, c_3$ $\ldots$ les fonctions (19) $\ldots$ les constantes t', ω, ω' dans les fonctions (19) doivent être indpendantes des coefficients a, b, c, donc l'intgrale gnrale contient (temps?) trois constantes arbitraires. $\ldots$ les dveloppements (9) pour les fonctions (19) $\ldots$ les coefficients $A_3, B_3, C_3 \ldots$ pour les fonctions (19)

$$\begin{aligned}
A_3 &= -A_1''e_1 - A_1'''e_2 - A_1^{(\mathrm{IV})}e_3,\\
B_3 &= -B_1''e_1 - B_1'''e_2 - B_1^{(\mathrm{IV})}e_3,\\
C_3 &= -C_1''e_1 - C_1'''e_2 - C_1^{(\mathrm{IV})}e_3,
\end{aligned}$$

ou d'aprs la relation (20)

$$\begin{aligned}
A_3 &= -(A_1'' - A_1^{(\mathrm{IV})})e_1 - (A_1''' - A_1^{(\mathrm{IV})})e_2,\\
B_3 &= -(B_1'' - B_1^{(\mathrm{IV})})e_1 - (B_1''' - B_1^{(\mathrm{IV})})e_2,\\
C_3 &= -(C_1'' - C_1^{(\mathrm{IV})})e_1 - (C_1''' - C_1^{(\mathrm{IV})})e_2,
\end{aligned}$$

$\ldots$

$$\begin{aligned}
&\left\{(a_2C_1' + a_3B_1' - 1)(A_1'' - A_1^{(\mathrm{IV})}) + (a_3A_1' + a_1C_1')(B_1'' - B_1^{(\mathrm{IV})}) + (a_1B_1' + a_2A_1')(C_1'' - C_1^{(\mathrm{IV})})\right\} e_1\\
&\left\{(a_2C_1' + a_3B_1' - 1)(A_1''' - A_1^{(\mathrm{IV})}) + (a_3A_1' + a_1C_1')(B_1''' - B_1^{(\mathrm{IV})}) + (a_1B_1' + a_2A_1')(C_1''' - C_1^{(\mathrm{IV})})\right\} e_2 = 0
\end{aligned}$$

Page 25

Puisque d'autre part d'aprs les quations (2) $-A_1'' = a_1B_1''C_1'' + a_2C_1''A_1'' + a_3A_1''B_1''$, il s'ensuit

$$\begin{aligned}
&C_1' + a_3B_1' - 1)A_1'' + (a_3A_1' + a_1C_1')B_1'' + (a_1B_1' + a_2A_1')C_1''\\
&a_1(C_1'B_1'' + B_1'C_1'' + B_1''C_1'') + a_2(A_1'C_1'' + C_1'A_1'' + C_1''A_1'') + a_3(B_1'A_1'' + A_1'B_1'' + A_1''B_1'')\\
&a_1(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') + a_2(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') + a_3(A_1' + B_1'')(B_1' + B_1'') - a_1B_1'C_1' - a_2C_1'A_1' - a_3A_1'B_1'\\
&a_1(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') + a_2(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') + a_3(A_1' + B_1'')(B_1' + B_1'') + A_1'.
\end{aligned}$$

De même on trouve

$$(a_2C_1' + a_3B_1' - 1)A_1''' + (a_3A_1' + a_1C_1')B_1''' + (a_1B_1' + a_2A_1')C_1'''$$
$$= a_1(B_1' + B_1''')(C_1' + C_1''') + a_2(C_1' + C_1''')(A_1' + A_1''') + a_3(A_1' + B_1''')(B_1' + B_1''') + A_1',$$
$$(a_2C_1' + a_3B_1' - 1)A_1^{(\mathrm{IV})} + (a_3A_1' + a_1C_1')B_1^{(\mathrm{IV})} + (a_1B_1' + a_2A_1')C_1^{(\mathrm{IV})}$$
$$= a_1(B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})}) + a_2(C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})})(A_1' + A_1^{(\mathrm{IV})}) + a_3(A_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})}) + A_1'.$$

...l'quation (21) pour des valeurs arbitraires de ω, ω' ...e_1, e_2 ...les coefficients de e_1, e_2 ...l'quation double:

$$\begin{aligned}
&a_1(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') + a_2(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') + a_3(A_1' + B_1'')(B_1' + B_1'')\\
=&a_1(B_1' + B_1''')(C_1' + C_1''') + a_2(C_1' + C_1''')(A_1' + A_1''') + a_3(A_1' + B_1''')(B_1' + B_1''') \qquad (22)\\
=&a_1(B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})}) + a_2(C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})})(A_1' + A_1^{(\mathrm{IV})}) + a_3(A_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})}).
\end{aligned}$$

On ajoute ...

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{?} A_1^{(k)} &= 0 = a_1\sum B_1^{(k)}C_1^{(k)} + a_2\sum C_1^{(k)}A_1^{(k)} + a_3\sum A_1^{(k)}B_1^{(k)},\\
\sum \quad B_1^{(k)} &= 0 = b_1\sum B_1^{(k)}C_1^{(k)} + b_2\sum C_1^{(k)}A_1^{(k)} + b_3\sum A_1^{(k)}B_1^{(k)},\\
\sum \quad C_1^{(k)} &= 0 = c_1\sum B_1^{(k)}C_1^{(k)} + c_2\sum C_1^{(k)}A_1^{(k)} + c_3\sum A_1^{(k)}B_1^{(k)},
\end{aligned}$$

et donc, puisque Δ est diffrent de zro:

$$\sum B_1^{(k)}C_1^{(k)} = 0,\ \sum C_1^{(k)}A_1^{(k)} = 0,\ \sum A_1^{(k)}B_1^{(k)} = 0,$$

et par suite

$$'_1 + B_1'')(C_1' + C_1'') + (B_1' + B_1''')(C_1' + C_1''') + (B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})})$$
$$(B_1' + B_1'' + B_1''' + B_1^{(\mathrm{IV})})C_1' + (C_1' + C_1'' + C_1''' + C_1^{(\mathrm{IV})})B_1' + B_1'C_1' + B_1''C_1'' + B_1'''C_1''' + B_1^{(\mathrm{IV})}C_1^{(\mathrm{IV})} = 0.$$

De même ...le coefficient de a_2, ainsi que celui de a_3 dans la somme ...l'quation double (22) ...

$$\begin{aligned}
&a_1(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') + a_2(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') + a_3(A_1' + B_1'')(B_1' + B_1'') = 0,\\
&a_1(B_1' + B_1''')(C_1' + C_1''') + a_2(C_1' + C_1''')(A_1' + A_1''') + a_3(A_1' + B_1''')(B_1' + B_1''') = 0,\\
=&a_1(B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})}) + a_2(C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})})(A_1' + A_1^{(\mathrm{IV})}) + a_3(A_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})}). = 0.
\end{aligned}$$

Nous pouvons tablir six autres de ces quations ...a_1, a_2, a_3 ...$b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ ...relations (9) ...de a_1, a_2, a_3 avec b_1, b_2, b_3 et c_1, c_2, c_3. ...

Page 26

$$\begin{aligned}
a_1(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') + a_2(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') + a_3(A_1' + B_1'')(B_1' + B_1'') &= 0,\\
b_1(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') + b_2(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') + b_3(A_1' + B_1'')(B_1' + B_1'') &= 0,\\
c_1(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') + c_2(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') + c_3(A_1' + B_1'')(B_1' + B_1'') &= 0.
\end{aligned}$$

Puisqu'ici le dterminant des coefficients est diffrent de zro, on obtient: (par ces quations . . .)

$$(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') = 0,\ (C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') = 0,\ (A_1' + B_1'')(B_1' + B_1'') = 0,$$
$$(B_1' + B_1''')(C_1' + C_1''') = 0,\ (C_1' + C_1''')(A_1' + A_1''') = 0,\ (A_1' + B_1''')(B_1' + B_1''') = 0,$$
$$(B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})}) = 0,\ (C_1' + C_1^{(\mathrm{IV})})(A_1' + A_1^{(\mathrm{IV})}) = 0,\ (A_1' + B_1^{(\mathrm{IV})})(B_1' + B_1^{(\mathrm{IV})}) = 0.$$

. . . ces neuf relations . . . a_1, b_2, c_3 . . . dans le systme de coefficients (a, b, c) . . . De même les trois premires quations dans les relations (23) exigent que deux des trois sommes $A_1' + A_1'', B_1' + B_1'', C_1' + C_1''$ aient la valeur zro. Nous obtenons par exemple(?) que

$$A_1' + A_1'' = 0,\ B_1' + B_1'' = 0, \quad \text{soit } A_1' = -A_1'',\ B_1' = -B_1''.$$

De plus deux des trois sommes $A_1' + A_1''', B_1' + B_1''', C_1' + C_1'''$ doivent être nulles. . . . $A_1' + A_1'', B_1' + B_1''$ . . . $A_1' + A_1''', B_1' + B_1'''$ . . . $A_1''' = A_1'', B_1''' = B_1''$ . . . $C_1''' = C_1''$ . . . $A_1''B_1''C_1'', A_1'''B_1'''C_1'''$

$$0 = a_1 B_1''(C_1'' - C_1''') + a_2 A_1''(C_1'' - C_1'''),$$
$$0 = b_1 B_1''(C_1'' - C_1''') + b_2 A_1''(C_1'' - C_1'''),$$

d'o, puisque le dterminant c_3' doit être non nul, . . . $B_1''(C_1'' - C_1''') = 0, A_1''(C_1'' - C_1''') = 0$, donc $C_1'' - C_1''' = 0$. [NDLR mal lisible, vrifier] . . . le quatrime systme de valeurs $A_1^{(\mathrm{IV})}, B_1^{(\mathrm{IV})}, C_1^{(\mathrm{IV})}$ . . . les relations (14) . . . $A_1^{(\mathrm{IV})} = -A_1', B_1^{(\mathrm{IV})} = -B_1'$, par consquent $C_1^{(\mathrm{IV})} = -C_1'$ . . . les quatre systmes de valeurs . . . $(A_1', B_1', C_1'), (-A_1', -B_1', C_1'), (-A_1', -B_1', C_1'(?)), (A_1', B_1', C_1')$.

. . . $C_1' + C_1'' + C_1''' + C_1^? = 0$ . . . par consquent $C_1''(?) = -C_1'$, . . . dans ce cas $(A_1', B_1', C_1'), (-A_1', -B_1', C_1')$ devraient [NDLR temps?] satisfaire simultanment les quations (2), . . .

. . . $A_1' + A_1''' = 0, C_1' + C_1''' = 0$, ou $B_1' + B_1''' = 0, C_1' + C_1''' = 0$ . . . $B_1''' = -B_1', C_1''' = -C_1'$. . . . $A_1^{(\mathrm{IV})} = -A_1', C_1^{(\mathrm{IV})} = -C_1'$, . . . $A_1^{(\mathrm{IV})} = -A_1', B_1^{(\mathrm{IV})} = -B_1'$, et $B_1^{(\mathrm{IV})} = -B_1', C_1^{(\mathrm{IV})} = -C_1'$, . . . le quatrime systme de valeurs . . . Par consquent les quatre systmes de valeurs deviennebt les suivants:

$$(A_1', B_1', C_1'), = (A_1', B_1', C_1'),$$
$$(A_1'', B_1'', C_1''), = (-A_1', -B_1', C_1''),$$
$$(A_1''', B_1''', C_1'''), = (A_1''', -B_1', -C_1'),$$
$$(A_1^{(\mathrm{IV})}, B_1^{(\mathrm{IV})}, C_1^{(\mathrm{IV})}) = (-A_1', B_1^{(\mathrm{IV})}, -C_1').$$

Page 27

. . . la relation (14) . . . les quantits $(C_1'', A_1''', B_1^{(\mathrm{IV})}$, . . . si bien que les quatre systmes de valeurs prennent la forme

$$(A_1', B_1', C_1'), (-A_1', -B_1', C_1'), (A_1', -B_1', -C_1'), (-A_1', B_1', -C_1').$$

. . . les quatre systmes, dont [les variables] satisfont aux quations (2), ont cette forme, . . . a_1, b_2, c_3 . . . dans la troisime quation dans (2) . . . les premier et troisime systmes de valeurs . . .

$$-C_1' = c_1 B_1' C_1' + c_2 C_1' A_1' + c_3 A_1' B_1',$$
$$+C_1' = c_1 B_1' C_1' - c_2 C_1' A_1' - c_3 A_1' B_1',$$

par consquent
$$0 = c_1 B_1' C_1',\ c_1 = 0.$$

...dans la troisime quation de (2) ...les premier et quatrime systmes de valeurs ...l'quation $c_2 = 0$. On montre de même que $b_1 = b_3 = 0$, ...dans la deuxime quation de (2) ...le systme de valeurs 1,2, ...1,3, et que $a_2 = a_3 = 0$, ...le systme de valeurs 1,2, ...1,4.

...La disposition (?) des quatre systmes de valeurs A, B, C ...$B_1' + B_1'' = 0, C_1' + C_1'' = 0$, [NDLR ordre modifi] ...$C_1' + C_1'' = 0, A_1' + A_1'' = 0$, ...$A_1' + A_1'' = 0, B_1' + B_1'' = 0$, ...le systme des quatre systmes de valeurs A, B, C ...systme A, B, C ...a_1, b_2, c_3 $\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')}, \frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}, \frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')}$, ...par consquent trois fonctions elliptiques du deuxime degr ...l'intgrale gnrale du systme diffrentiel, ...le rsultat:

VI. *Trois fonctions elliptiques du quatrième degré qui ont les mêmes périodes ne peuvent être la solution générale du système proposé pourvu que les coefficients ne satisfassent aucune des relations (1).*

...dans les formules (19) ...quatre systmes de valeurs A, B, C ...les quations (2) ...les relations (14) ...des coefficients a, b, c ...systme de valeurs A_1, B_1, C_1 ...les quantits A_1, B_1, C_1 ...les quantits A et B ...la grandeur C ...dans la forme de l'quation rciproque de (9). ...l'quation (5) ...que les quations dterminant u_1, u_2 sont:

Page 28

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 + u_1 \\ c_1 & c_2 + u_1 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 & b_3 + u_1 \\ c_2 + u_1 & c_3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} b_3 + u_1 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 + u_1 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + u_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + u_2 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_3 + u_2 \\ c_1 + u_2 & c_3 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} a_3 + u_2 & a_2 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 + u_2 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{24}$$

...les coefficients des plus hautes puissances dans les quations rciproques de (24) et (5) ...les membres constants dans (24) et (5) ...pendant que les coefficients des puissances troisimes dans les quations rciproques de (24) et (5) sont les coefficients des puissances premires dans (24) et (5), ...quand on dsigne les termes constants dans ces quations par K_0, K_0', K_0'' les coefficients des puissances premires par K_1, K_1', K_1'', on peut prsenter les quations dsires sous la forme:

$$\frac{K_1}{K_0} = 0,\ \frac{K_1'}{K_0'} = 0,\ \frac{K_1''}{K_0''} = 0.$$

...les coefficients dans deux ranges horizontales dans le systme de coefficients (a, b, c) ...la troisime range horizontale ...quatre solutions des quations $K_1 = 0, K_1' = 0, K_1'' = 0$, ...les dnominateurs K_0, K_0', K_0'', ...les quations (25) ... travers un troisime systme ...les dnominateurs K_0, K_0', K_0'', ...K_1, K_1', K_1'', ...a_1', a_2', a_3'... pour les sous-dterminants de a_1, a_2, a_3, ...

$$\begin{aligned} K_1'' &= ((a_3' + c_1')b_2' + b_3'b_1' - (a_3 + c_1)\Delta, \\ K_1' &= ((b_1' + a_2')c_3' + c_1'c_2' - (b_1 + a_2)\Delta, \\ K_1 &= ((c_2' + b_3')a_1' + a_2'a_3' - (c_2 + b_3)\Delta. \end{aligned}$$

...les grandeurs K_0, K_0', K_0'' ...ces trois produits de deux facteurs, ...de dterminant Δ ...un des trois mineurs a_1', b_2', c_3' ...les grandeurs K_1, K_1', K_1'' ...trois fonctions rationnelles entires (?) de $a, b, c \ldots b_1, b_2, b_3$ est du premier degr, ...ces grandeurs sont du deuxime degr. ...pour $K_1, K_1', K_1'' \ldots$ les grandeurs $b_1, b_2, b_3 \ldots$ la grandeur $\Delta \ldots$ est linaire en les termes b_1, b_2, b_3

$$\begin{aligned}
K_1'' =& b_1 c_2 b_2' - b_2(a_3 + c_1) b_2' + b_3 a_2 b_2' - (a_3 + c_1)\Delta, \\
K_1' =& b_2 b_3 a_1 (a_3 + c_1) + b_1 b_3 a_2 (a_3 - c_1) - b_1 b_2 (a_3^2 + a_1 c_3) \\
&+ b_1^2 a_2 c_3 - b_3^2 a_1 a_2 + b_2 a_1 b_1' - b_1 a_2 b_1' - (b_1 + a_2)\Delta, \\
K_1 =& - b_2 b_3 (c_1^2 + a_1 c_3) + b_1 b_3 c_2 (c_1 - a_3) + b_1 b_2 c_3 (c_1 + a_3) \\
&+ b_3^2 a_1 c_2 - b_1^2 c_2 c_3 + b_2 c_3 b_3' - b_3 c_2 b_3' - (c_2 + b_3)\Delta.
\end{aligned}$$

Page 29

$\ldots b_1, b_2, b_3$ systme linaire ...dfinissons y_1, y_2 par les quations:

$$\begin{aligned}
y_1 &= b_1 c_2 b_2' - b_2(a_3 + c_1) b_2' + b_3 a_2 b_2' + b_3' b_1', \\
y_2 &= b_1 b_1' + b_2 b_2' + b_3 b_3',
\end{aligned}$$

si bien que y_2 n'est rien d'autre que Δ.

De ces quations nous dterminons b_1 et $b_2 \ldots$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{y_2 a_2 b_2' - y_1 b_3' - b_2 b_2'(c_1 b_3' - a_1 b_1') + b_1' b_3'^2}{b_2'(a_2 b_1' - c_2 b_3')}, \\
b_3 &= \frac{y_2 c_2 b_2' - y_1 b_1' - b_2 b_2'(a_3 b_1' - c_3 b_3') + b_3' b_1'^2}{b_2'(c_2 b_3' - a_2 b_1')},
\end{aligned} \tag{26}$$

o ...que le dnominateur $b_2'(c_2 b_3' - a_2 b_1')$ est diffrent de zro, ...pour $b_1, b_3 \ldots K_1', K_1 \ldots K_1', K_1$ fonctions rationnelles entires de $y_1, y_2, b_2 \ldots R_1(y_1, y_2, b_2), R_2(y_1, y_2, b_2)$. ...les grandeurs $b_1, b_2, b_3 \ldots$

$$y_1 - (a_3 + c_1) y_2 = 0,\ R_1(y_1, y_2, b_2) = 0,\ R_2(y_1, y_2, b_2) = 0.$$

...Dfinissons (temps?) enfin une troisime fonction y_1' de b_1, b_2, b_3 par l'quation

$$y_1' = y_1 - (a_3 + c_1) y_2,$$

...

$$y_1' = 0,\ R_1(y_1' + (a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2) = 0,\ R_2(y_1' + (a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2) = 0,$$

et ce systme d'quations est manifestement identique

$$y_1' = 0,\ R_1((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2) = 0,\ R_2((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2) = 0.$$

Les fonctions $R_1((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2), R_2((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2) \ldots K_1', K_1 \ldots$ de $b_1, b_3 \ldots$ formules (26) ...qu'on remplace y_1 par $(a_3 + c_1) y_2$. ...pour b_1, b_3 dans les formules pour $K_1', K_1 \ldots$

$$\begin{aligned}
\text{pour } b_1 :& \frac{y_2 k_1 - b_2 k_4 + b_1' b_3'^2}{k_3}, \\
\text{pour } b_3 :& \frac{y_2 k_2 - b_2 k_5 + b_3' b_1'^2}{-k_3},
\end{aligned}$$

o k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 ont la signification suivante

$$
\begin{aligned}
&k_1 = a_2 b_2' - (a_3 + c_1) b_3',\ \ k_2 = c_2 b_2' - (a_3 + c_1) b_1',\\
&k_3 = b_2'(a_2 b_1' - c_2 b_3'),\ \ k_4 = b_2'(c_1 b_3' - a_1 b_3'),\ \ k_5 = b_2'(a_3 b_1' - c_3 b_3').
\end{aligned}
$$

...

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (a_3 - c_1) k_1 k_2 - c_3 k_1^2 + a_1 k_2^2,\\
C_2 &= -(a_3 - c_1)(k_2 k_4 + k_1 k_5) + 2 c_3 k_1 k_4 - 2 a_1 k_2 k_3,\\
C_3 &= (a_3 - c_1)(k_2 b_3' + k_1 b_?') + 2 a_1 b_1' k_2 - 2 c_3 b_3' k_1.
\end{aligned}
$$

Page 30

...les fonctions R_1, R_2

$$
\begin{aligned}
&R_1((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2) = -\frac{y_2}{k_3^2} \times\\
&\left\{ y_2 a_2 C_1 + b_2 [a_2 C_2 + k_3 (a_1 (a_3 + c_1) k_2 + (a_3^2 + a_1 c_3) k_1)] + b_1 k_3^2 + a_2 b_1' b_3' C_3 + a_2 k_3 (b_1' k_1 + k_3) \right\}\\
&R_2((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2) = \frac{y_2}{k_3^2} \times\\
&\left\{ y_2 c_2 C_1 + b_2 [c_2 C_2 + k_3 ((c_1^2 + a_1 c_3) k_2 + c_3 (a_3 + c_1) k_1)] - b_3 k_3^2 + c_2 b_1' b_3' C_3 + c_2 k_3 (b_3' k_2 - k_3) \right\}.
\end{aligned}
$$

Dans ces expressions ...pour b_1, b_3
Les expressions pour C_1, C_2, C_3 ...pour C_1, C_2, C_3

$$
\begin{aligned}
C_1 &= k_3 (b_2' - 2(a_2 + c_1)^2),\\
C_2 &= -2 b_2' k_3 (a_3^2 + c_1^2 + a_3 c_1 + a_1 c_3),\\
C_3 &= 3 k_3 (a_3 + c_1).
\end{aligned}
$$

...On reporte cela dans les expressions pour R_1, R_2 ...k_3 ...deviennent des fonctions linaires de b_1, b_2, b_3 quand on met $y_2 = b_1 b_1' + b_2 b_2' + b_3 b_3'$. ...avec $F_1(b_1, b_2, b_3), F_2(b_1, b_2, b_3)$

$$
g_1 = b_2' - 2(a_2 + c_1)^2),\ \ g_2 = b_2'(b_2' + 4(a_3 + c_1)^2),\ \ g_3 = 3(a_3 + c_1) b_1' b_3'.
$$

Par consquent on obtient

$$
\begin{aligned}
F_1(b_1, b_2, b_3) =& b_1 (a_2 b_1' g_1 + k_3) - b_2 (a_2 g_2 - a_1 (a_3 + c_1) k_2 - (a_3^2 + a_1 c_3) k_1)\\
&+ b_3 a_2 b_3' g_1 + a_2 (g_3 + b_1' k_1 + k_3),\\
F_2(b_1, b_2, b_3) =& b_1 c_2 b_1' g_1 - b_2 (c_2 g_2 - c_3 (a_3 + c_1) k_1 - (c_1^2 + a_1 c_3) k_2)\\
&+ b_3 (c_2 b_3' g_1 - k_3) + c_2 (g_3 + b_3' k_2 - k_3).
\end{aligned}
$$

...de b_1, b_2, b_3

$$
\begin{aligned}
&y_1 - (a_3 + c_1) y_2 = 0,\\
&y_2 F_1(b_1, b_2, b_3) = 0,\ \ y_2 F_2(b_1, b_2, b_3) = 0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

On voit donc que ce systme se dcompose en deux autres linaires par rapport b_1, b_2, b_3

$$
\begin{aligned}
\text{I.}\, & y_1 - (a_3 + c_1) y_2 = 0,\ \ y_2 = 0,\\
\text{II.}\, & y_1 - (a_3 + c_1) y_2 = 0,\ \ F_1(b_1, b_2, b_3) = 0,\ \ F_2(b_1, b_2, b_3) = 0.
\end{aligned}
$$

Le systme d'quations I est identique

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,$$

et il posde de nombreuses solutions finies qui sont donnees (?) par les formules (26) quand on y fait $y_1 = y_2 = 0$. ... les quations $K_1 = 0, K_1' = 0, K_1'' = 0$

Page 31

... les nombreux systmes finis de valeurs b_1, b_2, b_3 ... pour lesquels $y_2 = 0$, ... de dterminant deviendrait (temps?) nul, et par consquent pour lesquels les dnominateurs K_0, K_0', K_0'' s'annuleraient (temps?) aussi. ... $K_1 = 0, K_1' = 0, K_1'' = 0$ ... les quations II ... en gnral aucun des dnominateurs K_0, K_0', K_0'' ne s'annulera. ... les quations II une solution pour laquelle ni Δ ni aucun des mineurs a_1', b_2', c_3' ne s'annule. ... le cas simple o $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3$ ont les valeurs suivantes, $a_1 = a_2 = a_3 = c_1 = c_2 = 1, c_3 = 2$. Pour ce cas $k_3 = -1$ est diffrent de zro, nous pouvons ... que les deux systmes d'quations I et II remplacent le systme d'quations $K_1 = 0, K_1' = 0, K_1'' = 0$. Les quations II deviennent dans ce cas

$$\begin{aligned} &3b_1 - 4b_2 + b_3 = 0,\\ &3b_1 - 4b_2 = 1,\\ &7b_1 - 4b_2 + b_3 = -1, \end{aligned}$$

elles conduisent la solution $b_1 = -1/4, b_2 = -7/16, b_3 = -1$, pour laquelle ni Δ ni aucun des mineurs a_1', b_2', c_3' ne s'annule.

... $K_1 = 0, K_1' = 0, K_1'' = 0$ ... $\Delta = 0, a_1' = 0, b_2' = 0, c_3' = 0$, ... $K_0 = 0, K_0' = 0, K_0'' = 0$ ... les quatre systmes de valeurs dpendants (?) A_1, B_1, C_1 vrifiant les relations (14) ... les fonctions elliptiques (19) ... les dveloppements des fonctions (19) au voisinage ... les coefficients des puissances ngatives ... Nous disons donc

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} - a_1x_2x_3 - a_2x_3x_1 - a_3x_1x_2 = -\varphi_1(t),\\ &\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} - b_1x_2x_3 - b_2x_3x_1 - b_3x_1x_2 = -\varphi_2(t),\\ &\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} - c_1x_2x_3 - c_2x_3x_1 - c_3x_1x_2 = -\varphi_3(t), \end{aligned}$$

o les fonctions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ ne sont infinies en aucun point distance finie, mais ces fonctions sont doublement priodiques, elles doivent donc se rduire trois constantes. La nature de ces constantes ... mais les termes constants dans les dveloppements de $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ au voisinage d'un point quelconque distance finie, soit t'. Cette constante est pour φ_1 dj dveloppe dans la forme du membre de gauche de l'quation (21).

Page 32

... $2\omega, 2\omega'$ ... $2\omega, 2\omega'$ ... $2\omega, 2\omega'$ ... $2\omega, 2\omega'$ ... $2\omega, 2\omega'$

Thèses.

1) L'imaginaire dans l'analyse mathématique a la même réalité que le réel.
2) Par la représentation de la mécanique sous la seule supposition de la notion de temps, d'espace et de matière, l'expérience [expérimentation] est réclamée [occupée] comme par la représentation [l'interprétation] habituelle, sous l'hypothèse additionnelle de la notion de force, qui fait éviter aussi beaucoup de difficultés, lesquelles, par cette façon de représenter [interpréter] pour la compréhension, proviennent de l'obscurité de l'expérience.
3) Les idées de Hume sur la nexus? causale nous conduisent à écarter du traitement mathématique de la mécanique la notion de force comme étant métaphysique.