

Introduction

I Equations à points critiques fixes d'ordre 1 et 2 317
 Les six transcendentes du second ordre (A,I)–(A,VI) 318
 II Troisième ordre, la forme simplifiée est $y''' = (1 - \frac{1}{n})\frac{y''^2}{y'} + b(y)y'y'' + c(y)y'^3$. Résultats de Painlevé et Garnier 319
 III Simplifiée $y''' = 0$: équations $y''' = P(y'', y', y, x)$ (polynôme). Tout est résolu sauf quatre types ((6) page 322, IX, X, XI) 319
 IV Autres simplifiées: très simple après $y''' = 0$ 322
 Equation (E) “nouvelle” [transcendente] 323
 V Equivalence entre invariants de formes binaires et équations différentielles. Cas où l'intégrale générale est une fonction entière 323
 VI Critiques sur la transcendent “nouvelle” (E). Difficultés. Définitions plus simples des transcendentes: travaux de R. Fuchs et Schlesinger 324

Equations simplifiées des équations à points critiques fixes de la forme $y''' = R(y'', y', y, x)$, où R désigne une fraction rationnelle en y'', y', y à coefficients analytiques en x .

1. Forme nécessaire: 325

$$y''' = A(y', y, x)y''^2 + B(y', y, x)y'' + C(y', y, x) \tag{8}$$

Les 11 formes de A : $\sum_i \frac{c_i}{y' + a_i(y, x)}$ 325

[Page 364 condition $a_i = \text{polynôme du second degré en } y$.]

Simplifiée: 325

$$y''' = (1 - \frac{1}{n})\frac{y''^2}{y'} + b(y)y'y'' + c(y)y'^3 \tag{9}$$

Equation linéaire du second ordre associée

$$\frac{d^2u}{dy^2} = b(y)\frac{du}{dy} + (1 + \frac{1}{n})c(y)u \tag{10}$$

2. Valeurs nécessaires de $n, b(y), c(y)$ 326
 Solution générale du cas $n = -2$ 326
 Equations diophantiennes entre n , le nombre h de pôles de $b(y), c(y)$ et les deux indices de Fuchs r_1, r_2 de (10) en chaque pôle. Leurs solutions 327, 328
 Pour $n = 1$, condition $h \leq 6$ (page 333)
 Pour $n = -2$, pas de limitation sur h (pages 331, 333)
 Pour $(n - 1)(n + 2) \neq 0$, condition $h \leq 4$ (pages 329, 333)
 3. Les deux cas $(K_1, K_2) = (1, -n - 1), (N_1, N_2) = (\infty, \infty)$: $y(z)$ est du type Briot-Bouquet. Condition $1 \leq h \leq 4$ 328
 $h \leq 3$: $y(x) = f$. rationnelle de x ou de $e^{\lambda x}$, elliptique 329
 $h = 4$: équation transformée en $z(x)$, solution 329
 4. Cas $n = -2$: fonctions automorphes 330
 $n = -2, h = 3$: f. rationnelles des polyèdres réguliers, f. de Schwarz (cas particuliers fonction modulaire d'Hermite, invariant absolu J de Klein) 330
 $n = -2, h \geq 4$: f. fuchsiennes, f. kleinéennes 331
 5. Cas $n = 1, 2, 3, 5, \infty$: Briot-Bouquet 331

Equations à points critiques fixes de la forme $y''' = P(y'', y', y, x)$, où P désigne un polynôme en y'', y', y à coefficients analytiques en x .

6. Classes d'équations réduites admissibles	333
Equation réduite générale (17)	334
Liste et solution générale des 14 équations réduites particulières	334
Cas $\lambda > 1$: équation réduite (18) (non résolue ici)	334

$$y''' = y^\lambda y'' - (\lambda + 1)y^{\lambda-1}y'^2, \quad \lambda \text{ entier } > 1 \quad (18)$$

[\exists points critiques logarithmiques mobiles, Chazy 1912, 1918]

Cas $\lambda = 1$: classes I–XII (IX, X, XI non résolues)	334
Cas $\lambda < 1$: classe XIII	337
Méthode variationnelle de Poincaré	338
7. Transformations $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ à trois jauges $\lambda(x), \mu(x), \varphi(x)$	338
8. Deux méthodes: puissances de α (Painlevé), développements polaires (Gambier) ..	339
[Troisième méthode (Poincaré, Darboux) § 6 page 338, § 25 page 384]	
9. Classe I (indices $-1, 1, 6$): 6 types (23).	339
Leurs 6 intégrales premières (B) (ordre 2, degré 2)	340
Leur réduction aux équations (A) de Painlevé	340
Compléments à l'asymptotique de Boutroux	341
Fonctions entières associées $u = e^{\int y dx}$	341
Quelques transformées algébriques (C) de (B)	342
10. Classes II, IV–X, XIII (inachevées: IX, X)	343
11. Classe XI (détermination des coefficients inachevée)	344
$k = 7$: [Réduction $x - ct$ de Kaup-Kupersmidt]	345
12. Classe XII incluant III ("équation de Chazy")	345
$k = 2$: équation complète = simplifiée $+ay + b$	
$k = 3$: équation complète = simplifiée $+b$	
$(k - 2)(k - 3) \neq 0$: équation complète = simplifiée	
Invariance de la simplifiée par	

$$x \rightarrow \frac{Ax + B}{Cx + D}, \quad y \rightarrow \frac{(AD - BC)}{(Cx + D)^2}y - \frac{6C}{Cx + D}$$

Intégrale particulière à deux paramètres	346
Equation aux dérivées partielles quadratique remarquable (26)	346
$k = 2, 3, 4, 5$: l'intégrale générale est rationnelle	346
$k = 2, 3, 4, 5$: lien avec les polyèdres réguliers	346
Problème de Halphen	348
Halphen, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1$: solutions particulières polynomiales	348
Halphen, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$: solutions particulières = f. entières elliptiques	348
Halphen, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1$: solutions particulières = f. de Schwarz	348
Un des liens entre hypergéométrique et f. de Schwarz	348
Solution particulière $Z(x) = u(x)$ de (25)	349
Solution générale $y(x)$ de XII et $u(x)$ de (25), $k \geq 6$ [$y(x)$ = transformée algébrique de la fonction modulaire d'Hermite (Bureau, Annali di Matematica pura ed applicata XCIV (1972) 345–360; Bulletin de la Classe des Sciences LXXIII (1987) 335–353)]	350
Fonctions thétafuchsiennes	351
13. Commentaires sur les classes III et XII	352
Autres exemples d'équations avec une coupure essentielle mobile	352

Equation d'intégrale générale $y = \wp(\lambda \text{Log}(Ax + B); g_2, g_3)$	352
L'équation III est la transformée en $y_1 + y_2 + y_3$ d'un système différentiel d'ordre trois indiqué par Darboux	353
Une équation (30) de Jacobi d'ordre trois à coupure essentielle mobile	354
Utilité des groupes automorphes pour intégrer d'autres équations d'ordre trois	354
14. Récapitulation: 11 équations réduites sur 14 ont été intégrées	354
Equation du premier ordre (31) entre $u = e^{\int y dx}$ et $v = \frac{dy}{uy du}$	355
Equation simplifiée générale (33) pour u (ordre 3, degré 2)	356
Procédé de réduction de Painlevé (simplifiée, ordre 3, degré quelconque) \rightarrow (ordre 1, degré ≥ 1): inapplicable ici	356
Sur l'intégration de l'équation du premier ordre (31)	356
15. Principes de la théorie des intégrales singulières	358
Quelques moyens de définir des intégrales singulières	358
Exemples de singularités comparées de l'intégrale générale et d'intégrales singulières	359
Intégrale générale uniforme, singulière uniforme:	359

$$y''^2 + 4y'^3 + 2(xy' - y) = 0 \quad (B, I)$$

Intégrale générale uniforme, singulière à point critique fixe: 359, 360

$$2y'^3 + xy' - y = 0 \text{ (type de Clairaut)}$$

$$3x^2 y''^2 - 2(3xy' + y)y'' + 4y'^2 = 0 \text{ (Appell, 1889)}$$

Inapplicabilité du théorème d'existence de Cauchy au voisinage d'une intégrale singulière. 359

Intégrale générale à points critiques fixes, singulière à points critiques algébriques mobiles: 360

$$y'' = -(y^3 + \frac{\partial P_2}{\partial y})y' - \frac{\partial P_2}{\partial x} + yy' \sqrt{4y' + y^4 + 4P_2}$$

Intégrale générale entière, singulière à points critiques logarithmiques mobiles: 360

$$y''' = 2y'y'' + 2iy'' \sqrt{y'' - y'^2 - 1}$$

Une intégrale singulière relative à l'équation (17) 360

Intégrale générale uniforme (coupure circulaire mobile), singulière à points critiques algébriques mobiles: 361

$$y^2(yy''' + 3y'y'')^2 - y''^2(16y^3y'' - \pi^2) = 0 \text{ (Jacobi)} \quad (30)$$

16. Retour sur l'équation simplifiée (18), non résolue

Equations à points critiques fixes de la forme $y''' = R(y'', y', y, x)$, où R désigne une fraction rationnelle en y'', y', y à coefficients analytiques en x .

17. Ordre n , degré quelconque: limitation des degrés en $y^{(n-1)}$

Limitation du degré en y des coefficients de (8) 364

Conditions $y' + a_i(y, x) = 0$ en tout pôle $y = a(x)$ de l'équation complète 365

18. Application sur un exemple compliqué ($n = -2, h$ quelconque)

Résultat: complète = simplifiée 365

Simplicité du cas où la simplifiée a des points essentiels isolés mobiles 366

Equation complète avec point essentiel isolé mobile, simplifiée sans: absence d'un exemple 367

Singularités comparées des équations simplifiées et complètes	367
19. Application à une simplifiée compliquée $n = 1, h = 6$	367
Forme nécessaire de l'équation complète (32 fonctions)	367
Les 7 conditions aux pôles mobiles	368
Les 6×4 conditions aux zéros fixes	368
20. Preuve de la suffisance de ces 31 conditions (système (S))	368
Rappel du théorème de Cauchy	369
Longue démonstration de l'absence de points singuliers mobiles autres que des pôles (extension de la démonstration de Painlevé)	369
Note: inapplicabilité aux équations fuchsienues et kleinéennes, applicabilité à l'équation "de Chazy"	376
21. La preuve précédente ne requiert pas l'intégration du système (S)	377
Indications sur la façon d'intégrer ce système (S) (inachevé)	377
L'équation complète (39) = (E) ($n = 1, h = 6$) dépend <i>a priori</i> de 6 paramètres	377

Equations à points critiques fixes du quatrième ordre et d'ordre supérieur.

22. Conjecture sur la limitation des degrés en $y^{(k)}, k = 0, \dots, n - 1$ de	378
--	-----

$$y^{(n)} = P(y^{(n-1)}, \dots, y, x), P \text{ polynomial en } y^{(k)}$$

[démontrée par Chazy, CRAS 155 , 132-135 (1912); Acta math. 41 , 29-69 (1918)]	
Application à l'ordre 4, forme nécessaire de l'équation complète	378

$$y^{IV} = P_1(y, x)y''' + P_0(x)y'y'' + P_2(y, x)y'' + P_1(y, x)y'^2 + P_3(y, x)y' + P_5(x)$$

Equation réduite générique (poids 5, coefficients constants)	378
--	-----

$$y^{IV} = ay''' + by'y'' + cy^2y'' + dy'^2 + ey^3y' + fy^5 \quad (43)$$

Absence de difficultés analytiques nouvelles, difficultés arithmétiques	379
Equation réduite non-générique (poids 6, coefficients constants)	379

$$y^{IV} = ay'' + by'^2 + cy^3$$

Absence d'équation complète nouvelle pour les simplifiées:	379
--	-----

$$(y''' + 6y'^2)' = 0, (y''' - 12yy')' = 0$$

[inclut Korteweg-de Vries]

23. Equation simplifiée [Sawada-Kotera stationnaire potentielle]	380
--	-----

$$y'''' = 30yy'' - 60y'^2 \quad (44)$$

Forme nécessaire de l'équation complète	380
---	-----

$$y'''' = 30yy'' - 60y'^2 + \alpha y + \beta, (\alpha, \beta) \text{ constantes} \quad (45)$$

Solution particulière à trois paramètres de (45)	380
--	-----

$$y = \wp(x + A; \frac{\alpha}{12}, -\frac{\beta}{24} + C) + \wp(x + B; \frac{\alpha}{12}, -\frac{\beta}{24} - C)$$

[onde solitaire à quatre (sur cinq) paramètres de Sawada-Kotera]	
Insuccès à décider de l'uniformité de (45)	380
[Cosgrove (Stud. Appl. Math. 104 (2000) 1–65) : solution générale hyperelliptique de genre deux.]	
Transformée de (45) par $y = -(\text{Log } u)''$	380
$uu^{VI} - 6uu^V + 15u''u^{IV} - 10u'''^2 = \alpha(uu'' - u'^2) - \beta u^2$	(46)
Lien avec les invariants de formes binaires (Borel)	381
L'équation réduite de (46) est le troisième terme d'une suite d'équations	381
24. Les équations déduites des discriminants des formes binaires (47) ne définissent pas de transcendent nouvelle	381
Classe (P) des équations à intégrale générale entière (Borel)	383
25. Singularités des équations déduites des invariants usuels	384
Equation (E_n) d'ordre n provenant d'invariants impairs	384
Une [autre] méthode pour exprimer l'uniformité de la solution générale: uniformité de chaque terme d'un développement	384
Conditions nécessaires sur les racines d'une équation caractéristique	384
Pour n pair > 6 , (E_n) a [presque certainement] des points critiques transcendants	384, 385
Exemples d'équations (P) à intégrale générale uniforme	385

asymptotique de Boutroux	341
Briot-Bouquet	328, 332
développements en puissances de $1/(x + C)$	337
équation caractéristique	338, 384
fonction fuchsienne	322, 324, 331, 365, 376
fonctions kleinéennes	331, 365, 376
fonction modulaire d'Hermité	331
fonctions de Schwarz	321, 331
Hirota: invariants de formes binaires (Borel)	323, 381
intégrales singulières	358
invariant J de Klein	322, 324, 331, 365
invariants de formes binaires (Borel)	323, 381
Kaup-Kupershmidt	345
Korteweg-de Vries	379
méthode α de Painlevé	339
méthode des développements polaires de Gambier	337, 339
méthode variationnelle de Poincaré	338, 384
problème de Halphen	348
réductibilité	358
Sawada-Kotera	380
simplifiées $y''' = R(y'', y', y, x)$	319, 325
système de Darboux	353
théorème d'existence de Cauchy	359, 369
$uu'' - u'^2 = 0$	324, 381, 383
$S \equiv uu^{(4)} - 4u'u''' + 3u''^2 = 0$	324, 381, 385
$uu^{(6)} - 6u'u^{(5)} + 15u''u^{(4)} - 10u'''^2 = \alpha(uu'' - u'^2) - \beta u^2$	324, 381
$T \equiv uu''u'''' + 2u'u''u''' - u'^2u'''' - u''^3 - uu'''^2 = 0$	385
$S^3 - 27T^2 = 0$	385