「三心兩意」的數學教師

1　十分感謝香港公開大學，邀請我爲其「教師素養系列」作其中一講。由一位素養不深的數學教師主講數學教師素養，本來有點可笑，不過亦並非全無可取，至少由一位平凡人道出經驗，不致所謂「脫離群眾」！

這個講演是香港公開大學二十周年誌慶節目之一，首先我向主人家道賀，祝香港公開大學二十歲生辰快樂，繼續爲本地的高等教育作出貢獻。從 1993 年至 2004 年我曾擔任香港公開大學（前稱香港公開進修學院）兩門課的校外考試委員之職，有機會直接觀察這兩門課的教學內容及考核情況，了解開放及遙距教育的特色、優點、面對的困難和問題，對於我自己在大學裏的教學也有裨益。

2　今天恰巧是 3 月 13 日星期五，俗稱「黑色星期五」（Black Friday），在西方據說是不吉利的日子。我想到的倒非洋迷信，而是數學上的問題。下一次 3 月 13 日又是星期五在那一年發生呢？是否每年一定有「黑色星期五」呢？每年頂多有多少個「黑色星期五」呢？

如果你認爲這個問題沒大意思，讓我換另一個形式。今年 2 月 13 日也恰巧是「黑色星期五」，翌日 2 月 14 日是「情人節」（Valentine’s Day），便落在星期六。按照不少公司和辦事處的慣例，星期六只用半天上班，甚至根本不用上班，少了男士送花到心儀女士的工作地點表達傾慕之情。聽說今年「情人節」花店生意額下降了四成！如果花店老闆懂得計算，便知道明年的「情人節」落在星期日，連半天上班也沒了，他們會更沮喪！數學上的問題是：接著的好幾年，那些「情人節」落在星期六或星期日呢？

你會奇怪，上面說的一大堆話與今天的講題有什麼關係呢？遲一點你便會知道，現在讓我馬上點題吧。素養不深卻要談素養，只好來一個嘩眾取寵的副題目——「三心兩意」的數學教師——以吸引聽眾。你一定意會到題目蘊含了一項文字遊戲，「三心兩意」並非指日常用語中描述某人拿不定主意，既想這樣又想那樣的心理狀態和處事作風，而是指三種「心」和兩種「意」。我相信願意花時間來聽這個講演的教師，都是一心一意投身教育事業的有心人。

我心目中指的三種「心」是熱心、專心和耐心；兩種「意」是誠意和「大意」。固然，說成是「三心兩意」乃文字遊戲而已，你將會在講演中碰見更多的「心」。不用說，大前提是要有愛心，否則也無謂談什麼教育了。美國數學家莫伊斯（Edwin Evariste Moise）說過一段很有意思的話：「教學這項活動，涉及一種意義十分不明確的人際關係。教師本人是一位表演者、講解員、監工、領頭人、裁判員、導師、權威人物、對話者和朋友。所有這些角色都不易擔當，其中有不少還是互不協調的。因此，要成爲一位老練成熟的教師，個人品格的細緻成長是不可或缺的。」[見 *Notices of the American Mathematical Society*, 20(1973), 219 。] 此外，還要保持童心，法國人類學家李維史陀

（Claude Lévi-Strauss）說過這樣的一句話：「選擇教育作專業的學生並沒有向童年世界告別，反之，他正是要保持童心。」

以下讓我選取一些中小學課堂的例子，與大家談談數學教師如何「三心兩意」在課堂內外授業育人。

3 首先是熱心，最好的註腳來自十八世紀德國詩人和思想家諾瓦利斯（Novalis，此乃 Friedrich Leopold von Hardenberg 的筆名）：「一位真正的數學家根本就熱衷於數學。沒有熱心，便沒有數學。」

其次是耐心，我想舉兩個例子。

（1）有一套日本動畫影片叫做「歲月的童話」，由高畑勳編導及宮崎駿監製，1991 年首度放映。片中的主角是一位名叫岡島妙子的年青女士，她往鄉間渡假，回憶起小學時代的日子。其中有一個片斷提到她學習分數除法遇到困難，總是學不懂，於是媽媽著姊姊教導她。有一題是計算 $\frac{2}{3}$ 被 $\frac{1}{4}$ 相除應得多少？妙子喜歡畫圖畫，畫了一個蘋果，把它等分爲三份，取其中兩份、然後她在想怎樣把這兩份除以 4（見到 $\frac{1}{4}$ 她自然想到把給定的量除以 4）。從圖中看來她覺得不難，把那兩份逐份分成兩半得出 4 份，其中任何一份便是答案，也就是六分之一，所以她告訴姊姊答案是 $\frac{1}{6}$。姊姊極不耐煩地說：「不是，不是，完全錯了！你是在做乘數，不是除數！」（姊姊是指妙子計算了 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$，並非 $\frac{2}{3}\div\frac{1}{4}=?$）這把妙子弄得更糊塗了，她回應說：「乘數嗎？但怎麼做了乘數答案反而〔比較原先的 $\frac{2}{3}$〕更小了？」姊姊更不耐煩了，不願再教下去。

眾所周知，分數除法是小學數學課程的一個難點，教師除了要明白箇中道理，還須具備耐心才能把這項課題教好。妙子的姊姊便缺乏耐心，她只想把方法一次過說清楚（乘以除數的倒數），便以爲教懂了學生。影片中還有一段有趣的尾聲，妙子日後回憶這段學習往事，提到班上的女孩子不是人人像她一樣學不懂，有些依規矩辦，按照計算方法得出 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$，覺得分數除法完全不成問題。（妙子還加一筆，說那些一學就懂的女孩子中學畢業後過不久都結婚生子，成爲班上的早婚一族！箇中緣由，大家不妨討論一下。）

（2） 假設你要求學生構作一個菱形，一位學生把間尺放在兩個不同位置畫下間尺的兩邊，他說相交的形狀就是菱形了（見圖 1）。你會怎辦？

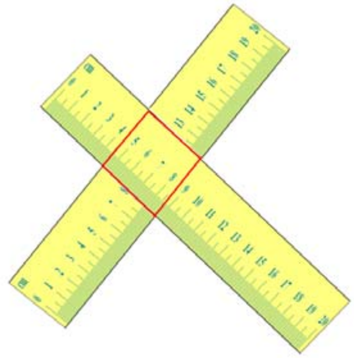

圖 1

沒有耐性的教師會立即喝停，只准學生用圓規直尺按照教師原定的做法去做。有耐性的教師可以做得較靈活；首先，作爲教師你必須弄清楚那相交的形是否菱形？如何證明？當中利用間尺的那些（幾何）特性？弄通之後教師便有發揮餘地，可以引導學生探討幾何構作題的意義、幾何構作和幾何證明的關係、…。這樣「借題發揮」不單沒有打擊學生的學習積極性，反而可能引起學生的學習興趣，何樂而不爲呢？

4　　接著，我打算把專心和誠意合起來談。做事和學習要專心，不必多說了；誠意卻有兩層意思。其一是對教學的誠意，希望盡力把課教好，盡力幫助學生成長。另一是對追求學問的誠意，那包括態度認真，做事不馬虎，錯了便要承認，不懂便說不懂（但會設法去尋求解答），未證明之前只能說是猜想，證明了還要仔細審察。

先說一個小故事吧，從 2005 年 10 月新加坡報章上讀到的。當年小學公開考試有一道試題，貌似無甚特別，如圖所示（見圖 2）。

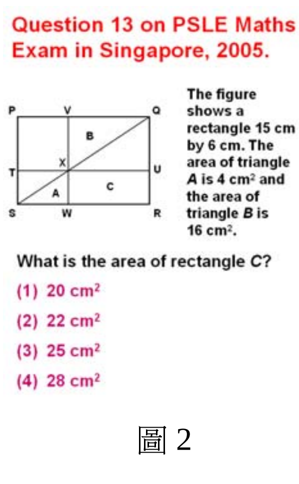

圖 2

矩形 *PQRS* 的邊長是 15 厘米和 6 厘米，*X* 是對角線 *SQ* 上的一點，*VXW* 和 *TXU* 是通過 *X* 各自平行於兩邊的線，把矩形分成四個三角形和兩個矩形。已知三角形 *A* 的面積是 4 平方厘米，三角形 *B* 的面積是 16 平方厘米，求矩形 *C* 的面積。題目給出四個選擇：（1）20 平方厘米，（2）22 平方厘米，（3）25 平方厘米，（4）28 平方厘米。

最簡單的算法是計算三角形 SQR 的面積，那是一半矩形面積，即是 $(15\times 6)/2 = 45$ 平方厘米，但那等於 $A+B+C$，因此 C 等於 $45-4-16=25$ 平方厘米。擬題者大抵也是這樣做，原意答案是（3）。後來有幾位考生指出（1）也是答案！既然 A 和 B 的比是 $4:16=1:4$，則 $SW:WR=RU:UQ=1:2$，故 $WR=\frac{2}{3}\times 15=10$ 厘米，$RU=\frac{1}{3}\times 6=2$ 厘米，所以 C 的面積是 $10\times 2=20$ 平方厘米。

那怎麼可以呢？C 的面積不能既是 25 平方厘米又是 20 平方厘米呀！考試當局最後作出公開道歉和更正，聲明不可能有這樣的矩形。作爲教師，我們應該再研究下去，題目的數據錯在那兒？譬如說，如果不更改矩形的邊長，但又要求 B 是 A 的四倍，則 A，B，C 是否已決定了？又譬如說，一般而言，A，B，C 是什麼？它們之間有沒有關係？這種深究下去的精神便是對追求學問的誠意了。

下面的問題經常縈繞我的腦際：「曾經修讀高等數學而且成績優異的學生，是否一定成爲一位優秀的中小學教師呢？」根據教學經驗我的答案是：「也許可以，但不一定。」由此帶出下一個問題：「爲什麼不一定呢？要成爲一位優秀的中小學教師，需要具備怎樣的眼光和見地？需要擁有什麼數學知識？」這又帶來另一項疑惑：「數學不就是數學嗎？難道學生要懂的數學有別於教師要懂的數學嗎？不同學習階段的數學容或有程度深淺和內容多寡的分別，但都是數學呀！」（香港教育學院的馮振業博士也關心同樣的問題，在過去好一段日子，我們斷斷續續討論了很多。借助他那豐富的中小學課室經驗和邃密的數學思維，我亦因而在教學上更加留意有關的事例，拿來跟他研究分析。）

首先，讓我介紹三位數學教育名家的觀點，這三位名家就是波伊亞（George Pólya），弗勒登塔爾（Hans Freudenthal） 和維特曼 （Erich Wittmann）。

波伊亞指出數學教育的主要任務是使學生勤於思考，他說過：「…首要者是教曉年青人去思考。」固然，困難之處不盡在於如何思考，而在於怎樣令學生主動地去思考。弗勒登塔爾提出「數學化」的教學過程 (process of mathematising)，不妨引用他自己說的一段耐人尋味的話：「兒童需要重複人類在歷史上的學習過程，但並非要依循真正發生的經過，最好是假定昔日的人要是比現今我們知道的還要多一點點，他們會怎麼辦。」這段話貌似自相矛盾，甚至有些荒謬！也許我們再看他的另一段話：「學生必須自己再次發現數學[結果]，在這發現過程中，學習者進行的活動就是運用數學手法和數學思維把親歷的經驗敘述、整理和詮釋，這種活動叫做「數學化」。」我以爲這段話的關鍵字眼是“再次發現”，既云“再次”也就顯示了教學是一種「導引學習」。學生在教師的導引下探索前行，可不是沒有目標的隨意漫遊。整個教學過程是需要精心策劃，仔細佈置的。不過，猶如一位好的導遊一樣，教師本人必須靈活面對各種突如其來的問題，雖然那是不可預知，教師卻要有所準備。因此，教師對課題的瞭解必須比較表面知識還要多一點點。維特曼提出「內容豐富的學習情境」（substantial learning environment）這個概念，他說：「它〔內容豐富的學習情境〕涉及超越了當下課程範圍的重要數學內容、方法和程序，而且是數學活動的一個豐富泉源。」要成功營造一個內容豐富的學習情境，教

師要懂的不能局限於正在教授的那一級的課本範圍。有句流行的話，要給學生一杯水，教師本人必須有一桶水，說的也是這個道理。

理論部份就說這麼多，有興趣的讀者可以參考前述三位數學教育名家的書本和文章。另外還有一篇舒曼（Lee S. Shulman）的文章提出「學科知識」（subject matter knowledge）和「學科教學知識」（pedagogical content knowledge）的概念，加以論述，與前述三位的論點相輔相成。[請參考：(1) H. Freudenthal, *Mathematics As an Educational Task*, 1973, (2) H. Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education*, 1991, (3) G. Pólya, *Mathematical Discovery*, *Volume 1 and 2*, 1965, (4) E. Ch. Wittmann, Mathematical education as a 'design science', *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), (1995), 87-106, (5) E. Ch. Wittmann, Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), (2001), 1-20. (6) L.S. Shulman, Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher*, 15(2) (1986), 4-14.]

我以前曾經提出了「學養教師」（scholar teacher）的想法。籠統而言，這種教師勇於迎接時代挑戰，無論對數學、教育及學生性向均能掌握，本身亦須爲思索者、研究者與課程設計者。在學科而言，「單單數學本科的專門知識並非是主要目的，更要注重的是課題與課題之間的關聯，高等數學與初等數學的“介面”，還有那種尖銳且獨立的評審眼光，以求體味數學的力量和優美，同時也體味數學的不足和局限。」[可參看 : F.K. Siu, M.K. Siu, N.Y. Wong, Changing times in mathematics education : The need of a scholar-teacher, in *Proceedings of the International Symposium on Curriculum Changes for Chinese Communities in Southeast Asia : Challenges of the 21st Century*, ed. C.C. Lam, H.W. Wong, Y.W. Fung, 1993, 223-226.]

由此可見，教師必須增強自信心，不單是對掌握「學科知識」的自信心，也包括勇於承認自己不懂的自信心，不過卻必須同時曉得如何去思考、探索、尋找資料，以補不足。教師必須培養好奇心，樂於學習，慣於反思。唯其如此，教師方能以身作則，使學生對學習數學持正面態度。要成爲一位「學養教師」應該有「處處留心皆學問」的情懷，例如開首提到的「黑色星期五」問題，就在身傍順手拈來，卻大有發揮之餘地。數學教師需要懷著專心和誠意進行數學研究。但這種數學研究與一位數學工作者通常進行的研究雖然精神相同，內容和性質都有別。因爲教師必須運用學生懂得的語言去解釋，也要照顧到學生的學業程度和知識背景。簡化而言，兩者主要相異之處如下表所示。

數學工作者	中小學數學教師
問題處於學術領域的前沿。	問題源自教學上的需要。
在文獻上通常找不到答案。	在文獻上可能找到也可能找不到答案。
盡量把問題表述成一般形式。	往往只著意討論問題的特殊情況。
盡量尋找一般的解答。	有時對尋找具體的解答更感興趣。
設法運用任何數學知識、方法和技巧。	只能運用某些範圍內的數學知識、方法和技巧。
優美解答是追求的準則。	優美解答不一定是追求的準則，有時貌似‘樸拙’的解答反而更派用場。

以下看看兩個例子，第一個非常古老，卻有極深刻的數學內容，第二個在日常小學課堂裏會出現，淺易得多。

（1） 有一塊古代巴比倫的泥板，現存哥倫比亞大學（Columbia University）博物館，編號叫做「普林頓 322」（Plimpton 322），是公元前十八世紀的文物。泥板上面刻上幾行數字，驟看去數字雜亂無章，初時博物館目錄上只把它列爲「商業賬目」。在 1945 年有兩位數學史專家 —— 諾伊格鮑爾（Otto Neugebauer）和薩克斯（Abraham Sachs）—— 細心研究這塊泥板，發現這堆看似雜亂無章的數字竟然是一個所謂「畢氏三元數組」（Pythagorean triplet）的表，即是一系列的三元整數組（B，C，D）滿足 $C^2 - B^2 = D^2$。泥板上見到的數字是 B 和 C，但由此可推算 D。換句話說，B，C，D 是一個邊長是整數的直角三角形的三邊，其中 C 是斜邊。有些數學家甚至認爲「普林頓 322」根本就是一個三角函數表！近年有位數學史家羅遜（Eleanor Robson）提出另外的看法，對我們這個講演很富啓發。她認爲研究數學史不能單從數學內容的角度入手，必須全面研究，文化角度、語言學角度、考古學角度、社會背景角度都要考慮。因此，經過多重考慮，她認爲「普林頓 322」有其教育意味，它是用來設計習作和學習情境以培育文書見習生，好便將來擔當文書和計算的工作。[E. Robson, Neither Sherlock Holmes nor Babylon : A Reassessment of Plimpton 322, *Historia Mathematica*, 28 (2001), 167-206; Words and pictures : New light on Plimpton 322, *American Mathematical Monthly*, 109 (2002), 105-120.]

顯然，爲了製作這塊泥板，古代巴比倫人傾注不少研究心血於其中，叫人驚嘆。過了四千年後，我們無從知道當時的巴比倫人如何構作那些「畢氏三元數組」。如果他們的目的真是爲了儲備習題數據的話，那便可能是歷史上最早爲擬題而作的數學研究了！

（2） 有些小學生對循環小數的箇中道理沒吃透，認識不清，以爲把分數展開成小數表示時，小數開始重複便是循環小數。譬如說，把 $\frac{124}{1111}$ 展開時，得到 $0.111\cdots$，有些小學生便以爲 $\frac{124}{1111} = 0.\dot{1}$。其實，正確答案是 $\frac{124}{1111} = 0.\dot{1}11\dot{6}$，因爲以 1111 除 124，至小數點第四個位餘數（124）才頭一次重複。

爲了讓學生明白他們的誤解，教師需要給一些類似 $\frac{124}{1111}$ 的例子，即是一些外貌不是太繁複的分數，展開成小數時，小數重複了好一會才再起變化。一個重複更多位小數的例子是 $\frac{20576}{37037} = 0.\dot{5}5555\dot{2}$。

如何構作這類例子？只要稍作計算，不難得出答案。假設分數 $\frac{A}{B}$ 的小數表示是 $0.\dot{a}aa\dot{b} = 0.aaabaaabaaabaaab\cdots$，即是

$\frac{A}{B}=\frac{a}{10}+\frac{a}{10^2}+\frac{a}{10^3}+\frac{b}{10^4}+\frac{a}{10^5}+\frac{a}{10^6}+\frac{a}{10^7}+\frac{b}{10^8}+\cdots$。

稍作一點計算便得到 $\frac{A}{B}=\frac{1110a+b}{9999}$。由於 1110 被 9 除餘 3，我們只用安排 $3a+b$ 是 9 的倍數便能把分數約簡一點。設 $a=1$ 和 $b=6$，便得到 $\frac{124}{1111}$ 這個例子，同樣的手法可以構作更多的例子。

有興趣讀到更多對數學教師有益的「數學研究」個案，你不妨參考以下的文章：蕭文強 , 回到未來──從大學講堂回到中小學課室 , *Journal of Basic Education*, 16(1)(2007), 97-114。

5 剩下要談的是「大意」，我指的自然不是粗心大意的「大意」，而是全局大意的「大意」，英文詞彙中有個字 ── bird's-eye view (鳥瞰) ── 更形象地道出這個意思。講演時間所限，我只舉一個例子，那是源於一位小學教師向我的一項提問。

問題是：「以 $\frac{1}{4}$ 除 $2\frac{5}{12}$，商（quotient）是多少？」那位教師的困惑在於如何處理收回來的考卷中兩種不同的答案，有些學生說是（a）$9\frac{2}{3}$，卻有些學生說是（b）9（餘數是 $\frac{1}{6}$）。（a） 和（b）中那一個是正確的答案呢？

我一向認爲，要好好回答一個數學上的提問，單單「是」或「否」不只未足夠，甚至有危險。法庭上能言善辯的律師喜歡咄咄逼人地說：「你只用回答是或否。」在這兒我可不能這樣回答，必須多費一點唇舌，既講「大意」也講細節。只滿足於「是」或「否」，容易掉進蘭佩爾（Magdalene Lampert）描述的 '陷阱'：「這種文化習慣是由學校經驗養成。做數學等同按照教師訂下的規則逐步去做；認識數學等同硬背規則，碰到教師出題時便依樣畫葫蘆；至於數學上的對錯等同教師頒佈答案是對是錯。」[M. Lampert, When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching, *American Educational Research Journal*, 27(1990), 29-63.]

先從基本概念起講，小學生也知道有加法和乘法，我們對它是如此熟悉，初學時年紀又小，早已忘記當時是怎樣學懂的。但從認知角度看，加法和乘法的學習過程是有分別的，很多年前著名的瑞士教育家皮亞傑 （Jean Piaget）已經對此有深入的闡述。[有興趣的朋友，可以參考：Terenzinha Nunes, Peter Bryant, *Children Doing Mathematics*, 1996, 第七章和第八章。] 再者，從數學角度看，加法和乘法也是獨立的，雖然在正整數的場合，乘法得到的結果可以從累加得到，例如 3×5 等於 $3+3+3+3+3$ 或者 $5+5+5$。如果只是習慣把乘法看成由加法而來，便無從理解 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ 是什麼（何謂把 $\sqrt{2}$ 累加 $\sqrt{3}$ 次？）更難理解 $\sqrt{2}\times\pi$ 是什麼意思了。

在小學中學我們只是生活在三兩個數系裏，就是整數系、有理數系和實數系 ── 頂多再加一個複數系。固然，當時我們多從直觀方面與這些數系打交道，有

理數看成是分數，實數看成是無窮小數或者幾何線段的長度，等等。正式去了解這些數系，是後來學習高等數學的事。更一般地，任何一個抽象代數的入門課程都會討論何謂環（ring）？何謂整環（integral domain）？何謂域（field）？一個環是裝備了兩種運算（叫做加法和乘法）的集合，兩種運算需要滿足某些條件。整數系便是最常見的環，它的乘法是可交換的，$a \times b = b \times a$，所以叫做交換環。它還有一個特別的性質，即是具有單元及非零元相乘必爲非零元。滿足這種性質的交換環叫做整環。在整環裏卻不一定可以進行除法，就是乘法的逆運算：給定環中一個元a和一個非零元b，是否必有元c使$b \times c = a$呢？有的話我們便可以進行除法，把c寫成a/b（以b除a）。一般而言，若a和b是整環R的兩個元，$a+b$和$a \times b$仍然是R內的元，但a/b卻不一定有意思（若有元c使$b \times c = a$，我們便說b整除a）。有理數組成的集Q也是一個整環，並且可以進行除法，若a和b是Q內的元，且b是非零元，則a/b也是Q內的元。能進行除法的整環便叫做域，有理數系、實數系和複數系都是域。

美國著名數學家麥克萊恩（Saunders MacLane）如此描述何謂抽象代數：「⋯ 研究一般數學對象之間的代數運算，旨在獲得有足夠深度的定理和結果，以便知道原先那些特殊數學對象（抽象成爲一般數學對象）的重要性質。」[S. MacLane, History of abstract algebra: Origin, rise and decline of a movement, *Texas Tech. Univ. Math, Series*, 13 (1981), 3-35.]，道出了不少學生視作抽象無用的學問背後的意義。在一個環裏，加法和乘法是兩種截然不同的運算，把它們聯繫起來的就是分配律（distributive law），但一種運算不能由另一種產生出來。在某些整環裏我們希望維持某種意義下的除法，就導致抽象代數討論的一種數學結構，叫做歐氏整環（Euclidean domain）。

撇開技術細節，歐氏整環的中心思想是某種除法，卻以乘法的形式來表示，即是對任意元a和b，其中b是非零元，必有元 q, r 使 $a = b \times q + r$，這兒的r或者是零元或者是“小於b”的元。我們把這種運算叫做歐氏算法（Euclidean algorithm）。譬如整數系裏我們用數的絕對值去比較大小，它便構成一個歐氏整環，它反映了小學時代我們學過的「帶餘除法」。就是說，對任意正整數a和b，必有最大的整數 q使a仍然不小於$b \times q$，因此$a = b \times q + r$，r或是零或是小於a的正整數。我們把b叫做商，r叫做餘數。「黑色星期五」問題便需要運用「帶餘除法」了。以幾何觀點看，事情來得更清晰，我們把長爲b的線段去丈量長爲a的線段，看看餘下多少。同樣地，即使長度是無理數，我們也可以依樣畫葫蘆，找出最大的整數 q使a不少於 $b \times q$。就像前面的問題，$a = 2\frac{5}{12}$，$b = \frac{1}{4}$，有 $a = b \times 9 + \frac{1}{6}$，商是 9 而餘數是$\frac{1}{6}$，即是答案（b）。有人會說，但$a/b = 9\frac{2}{3}$，那才是商呀，即是答案（a）。

其實，在高等數學，歐氏算法意義底下的商較有意思。在域裏談歐氏算法，本來意思不大，因爲對域裏的任意元a和任意非零元b，a/b也是域裏的元，所以$a = b \times (a/b) + 0$，即是可以安排餘數爲零！不過在小學數學，分數的「帶餘除

法」還是有意思的，在某些場合有需要如此看待事物，例如從長 $2\frac{5}{12}$ 米的絲帶中截取長 $\frac{1}{4}$ 米的絲帶，可以得多少段？餘下的絲帶有多長？這種丈量的幾何描述形式，在古代希臘的《原本》（*Elements*）和古代中國的《九章算術》都有記載。東西方都互相獨立地發現了這個可以說是世界上最古老也是最重要的算法，在西方叫做「歐氏算法」，在東方叫做「更相減損法」。

回到本節開首的問題，我的建議是不要把焦點放在「商」這個名詞，更重要者是測試學生是否懂得某些運算。如果你真的想知道學生懂不懂 $2\frac{5}{12} \div \frac{1}{4}$ 是什麼分數，直問就是了。如果你想知道學生懂不懂運用「帶餘除法」去計算 $2\frac{5}{12} \div \frac{1}{4}$，可以直接這樣問，或者把問題妝扮成某種場景讓學生自行運用「帶餘除法」。用了「商」這個名詞可能引起混淆，尤其在課堂上很可能兩種意義的商（歐氏算法的商和域的除法的商）都在不同場合曾經出現過！

早在一個世紀之前，數學家克萊因（Felix Klein）說過一段語重心長的話：「大學新生入學一開始就發現他面對的 [數學] 問題好像跟中學裏學過的東西一點也沒有聯繫，自然他很快便完全忘記了中學裏學過的東西。畢業後他當上了教師，突然發覺自己被要求依循老套的方法講授傳統的初等數學。由於缺乏別人的指導，他難以辨明當前的數學內容和他曾學到的高等數學有什麼聯繫，於是他很快便接受了這套由來已久的教學方式。他的大學教育頂多成爲一種愉快回憶，但對他的教學毫無影響。」[F. Klein, *Elementary Mathematics From An Advanced Standpoint, Volume I*, 1908; 1924 年的第三版有英譯本 。]

對於這個「雙重不連續（double discontinuity）」現象波伊亞在一篇文章裏複述一位數學教師的妙語：「數學系給我們又厚又韌的牛排，嚼它不動；教育學院給我們淡而無味的清湯，裏面一丁點肉也沒有。」 [G. Pólya, Ten Commandments for teachers, *J. Educ. Fac. & College of Univ. British Columbia*. 3(1959), 61-69] 數學教師需要的是味道鮮美、營養豐富的濃郁肉湯！（見圖 3）

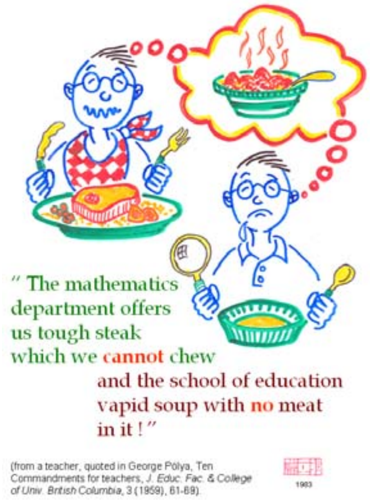

圖 3

讓我以下面一幀漫畫（見圖 4 ）說明中小學課室與大學講堂的關係。

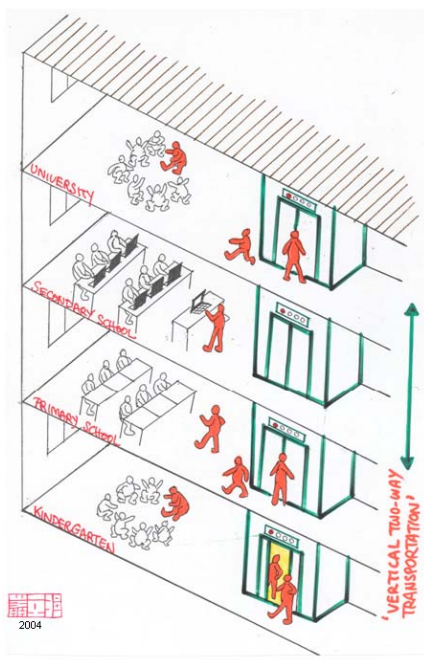

圖 4

一座四層建築物的樓下是幼兒園，一樓是小學，二樓是中學，頂樓是大學。對一位在下面三層任教師的人來說，頂樓是提供「學科知識」的地方。理想的情況是它也提供個人學養成長的營養料，讓教師能在各樓層之間上落自如，就像設置了一部連結各樓層的升降機。經常進行數學研究就像把升降機好好保養，以求達致更佳的上落自如的功能。經常進行數學研究，教師才能更成功設計課程及教學方案，更深入理解要教授的數學內容，更有信心面對學生可能提出的疑問，更容易提高學生的興趣，甚至使一些學生與數學擦出火花！

6 數學教育有狹義和廣義兩方面：前者指傳授數學知識，後者較難界定，我喜歡把它說成是數學觀的體現。 不同時代不同地區的數學課程綱要，就內容細節和措詞字眼而言或不盡同，但籠統扼要地說，其目的可歸納爲三方面：（甲）思維訓練，（乙）實用知識，（丙）文化素養。 多年前我讀了王梓坤教授寫的好書《科學發現縱橫談》（1978 年）後得到啓發，在一次給教育學院師生的講座中談到數學上的“才、學、識”。這個提法源於清代文學家袁枚的話：「學如弓弩，才如箭鏃，識以領之，方能中鵠。」正好借用以概括上面提到的三項數學教育目的：（甲）思維訓練，（乙）實用知識，（丙）文化素養。於數學而言，“才”是指計算能力、推理能力、分析和綜合能力、洞察力、直觀思維能力、獨立創作力，等等；“學”是指各種公式、定理、算法、理論，等等；“識”是指分析鑒別知識再經融會貫通後獲致個人見解的能力。單是“學”的傳授，僅是狹義的數學教育而已，“才、學、識”三者兼顧才是廣義的數學教育。

南宋詩人陸游在 1208 年寫了一首詩（「示子遹」）：「我初學詩日，但欲工藻繪；中年始少悟，漸若窺宏大。…… 汝果欲學詩，工夫在詩外。」陸游的「工夫在詩外」包含了四點：（１）不要只顧專注文采工夫，單求詩文華茂；（２）更要注意思想境界，詩文才有內涵；（３）也要豐富生活閱歷，詩文才有活力；（４）還要注意品德修養，詩文才有風骨。不妨借用陸游的詩句改成「汝果欲學數，工夫在數外。」這亦包含了四點：（１）不要只顧專注數學形式工夫；（２）更要注意數學思想方法；（３）也要豐富數學生活閱歷；（４）還要注意數學工夫的品德修養。數學生活閱歷是指什麼呢？我以爲可以分爲三方面：縱是追溯數學概念和理論的來龍去脈，橫是探討數學文化的本質和意義，廣是認識數學的應用及經常聯繫數學與日常生活碰見的現象。

數學工夫的品德修養又指什麼呢？明代徐光啓在 1607 年寫了「《幾何原本》雜議」，當中有言：「下學工夫有理有事；此書爲益，能令學理者祛其浮氣，練其精心，學事者資其定法，發其巧思，故舉世無一人不當學。」又說：「此書有五不可學：燥心人不可學，麤心人不可學，滿心人不可學，妬心人不可學，傲心人不可學。故學此者，不止增才，亦德基也。」並不是說讀了幾何即成爲聖人（數學家群中也有德行不是那麼完美的人），但正如徐光啓所言，數學對人的品格培育和處事態度，有一種潛移默化作用。如果學校只把數學看作一種實用工具的話，就連這一點作用也抹掉了。

剛於數年前逝世的俄羅斯數學教育家沙雷金（Igor Fedorovich Sharygin）對幾何情有獨鍾，並且說過：「幾何乃人類文化重要的一環。…幾何，還有更廣泛的數學，對兒童的品德培育很有益處。…幾何培養數學直覺，引領學生進行獨立原創思維，…幾何是從初等數學邁向高等數學的最佳途徑。」他還說：「學習數學能夠樹立我們的德行，提昇我們的正義感和尊嚴，增強我們天生的正直和原則。數學境界內的生活理念，乃基於證明，而這是最崇高的一種道德概念。」今天，有多少數學教師仍然懷著這種信念在課堂上授課呢？這使我想起歷史學者巴森（Jacques Barzun）說過一句話：「教學不是逝去了的藝術，然而對它的尊重卻是逝去了的傳統。」[見諸 *Newsweek*, December 5, 1955.] 希望越來越多「三心兩意」的數學教師，把這份傳統維持下去！

****

〔本文是 2009 年 3 月 13 日在香港公開大學二十周年誌慶「教師素養系列」作的講座。〕