

《數學證明》的寫作經過

寫作《數學證明》這本書，我用了不少時間和氣力。書的內容其實反映了個人對數學的一些看法，書的撮要內容，可以在下列文章讀到：蕭文強，數學 = 證明？《數學傳播》，第十六期第四卷（總 64），1992年，50-58頁。原書在一九九〇年出版，在二〇〇七年和二〇〇八年再版，原版序言及再版序言約略道出了寫作該書的經過，錄於下面。

《數學證明》原版序言（1989年）

有一則關於十八世紀瑞士數學家歐拉（L. Euler）的“小道新聞”，經由貝爾（E. T. Bell）的通俗讀物《大數學家》（九章出版社，1998年¹）而廣為流傳。那是敘述歐拉與法國哲學家狄德羅（D. Diderot）辯論的經過。據云俄羅斯女皇對狄德羅在她的宮廷內散播無神論極為不滿，但又不便面斥，便請歐拉想個辦法把他趕走。有一天，狄德羅應邀進宮聽一位數學家證明神的存在，他欣然前往。那時歐拉走到他的跟前，一本正經地以嚴肅而鄭重的口吻對狄德羅說：“尊貴的先生， $\frac{a+b^n}{n} = x$ ，故神存在。請回應吧！”狄德羅啞口無言，四周響起嘲弄的笑聲，令他十分難堪，於是，他請求女皇准許他回法國去。這則“小道新聞”的可信程度極低²，很難想像歐拉會說出這種無稽之談的話來，但它卻是一個生動的例子，說明什麼叫做“恐嚇證明法”（proof by intimidation）！這種證明可謂一文不值，它既無核實作用，更無說明作用，只有迷信權威的人才會被這種證明嚇唬住。

除了上述那種所謂證明可以不予理會以外，數學證明是一個十分有意思的話題，因此，我選了這個話題與讀者一起探討。本書所指的數學證明，意義是頗廣泛的，讀下去你便知道為什麼我這麼說了。以下十章的內容，請讀者隨自己口味選讀，大部分章節內容是互相獨立的，但總的脈絡，可由目錄窺見。每節對讀者的數學背景知識的要求不盡相同，對一部分讀者來說，某些節的內容或嫌過深，不易明白，甚至會出現不熟悉的術語。不過，若只求大致了解，那不會構成太大的障礙。總的來說，只要具備中學程度數學的知識，應能看明白大部分數學內容；若具備大學程度的數學知識，應能看明白全部數學內容。

在序言裏，讓我說極少作者會在序言裏說的話，即是告訴讀者這本書並不討論什麼！但不討論的，絕對不表示不重要，只表示作者本人的無知。首先，這本書

¹ 原英文本 *Men of Mathematics* 在 1937 年出版。

² 狄德羅本人不只懂數學，還寫過數學的文章，看來不大可能就此被嚇唬了。B. H. Brown 寫了一篇札記，說明為何這個故事不可信，刊於 *American Mathematical Monthly*, 49, 1942, 302-303。讀者也可以參考：Inna Gorbatov, *Catherine the Great and French Philosophers of the Enlightenment*, Academica Press, Bethesda, 2006, Chapter V。

沒有教讀者怎樣去證明數學定理，或者證明數學定理有什麼訣竅。我假定讀者已經作過不少數學證明，對證明這項數學活動有一定程度的認識。其次，這本書也沒有從邏輯的角度討論何謂數學證明。要認真討論這個技術味道很濃的問題，非我力能勝任，亦不符合這套《叢書》³的編寫宗旨。再其次，這本書也沒有正面接觸數學證明的哲學意義，雖然任何關於數學的哲學必須對數學證明有所交代。好了，作過上述的消極聲明後，我應該補充說，要討論數學證明，不可能完全避開上述的三個範圍，因此讀者在以下章節的字裏行間還是會見到它們的影子。

讀者會問，那麼這本書究竟談些什麼？當我最初下筆的時候，我曾想過採用一個奇特的書名《證明乃證明乎？》。後來覺得那是標新立異，嘩眾取寵，也就打消了這個念頭。寫完後卻想到另一個較貼切的書名，但由於冗長，也沒採用，那是《從歷史上的數學文獻觀看數學證明》。實際上，這個冗長的書名才比較如實地反映了本書的內容。這個構思其實潛伏了很久，正好藉著寫作本書予以整理。說來話長，十五年前我在美國一所大學裏教書，有一天系主任匆匆跑來告訴我有位同事跌傷了腿，得休養一段日子，要我代他的課。原來沒有人願擔那門課。當時我是系裏年資最淺的一員，“苦差”自然落在我的肩上！不過，焉知非福，這份“苦差”對我來說竟成了最好的學習機會，更影響了我對數學的整體看法，甚至使我對數學產生了更強烈的信念和熱愛。為什麼沒有人願擔那門課呢？原來那門課美其名為《數學欣賞》，實則是厭惡數學的人被逼修的數學課。它只是為了讓學生取得足夠的學分畢業（美國的大學教育主張通識教育，不論主修何科，規定學生必須選修若干文史科目與數理科目等等）。上課的第一天，一百五十多位學生劈頭便嚷：“我又不需要使用數學，學它做什麼？”頓時令我啞口無言！這促使我開始從一個不需要使用數學作為工具的人眼光去想這個問題。通過大量閱讀與反覆思量，我認識到哲學的反思與歷史的反思的重要，尤其從數學史獲得不少啟發，這就是我對數學史產生濃厚興趣的原因。在一九七六年，我把自己當時一些猶未成熟的想法寫成兩篇文章，題為：厭惡數學的人的數學課（*Mathematics for math-haters*，發表於 *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 8, 1977年, 17-21頁）和「數學發展史給我們的啟發」（發表於《抖擻》雙月刊，第17期, 1976年, 46-53頁）。之後基於這些想法陸續寫了一些文章，並撰寫了一本小冊子《為什麼要學習數學——數學發展史給我們的啟發》（學生時代出版社, 1978年; 修訂本, 九章出版社, 1995年）。到了一九八四年重新整理自己的思想，寫成了「歷史、數學、教師」（{History of [(Mathematics)]Teachers}），原文沒發表，法譯文刊登於 *Bulletin de L'association des Professeurs Mathématiques*, No.354, 1985年, 304-319頁），又在一九八六年寫成「誰需要數學史」（發表於《數學通報》第四期, 1987年, 42-44頁）。這兩篇文章可說是我十年來學習與反思的匯報。就在這個時候，徐利治教授來函提及編寫《數學方法論叢書》的計劃，並問我願不願也寫一本。這是一項非常有意義的計劃，我雖自知能力有限，但覺得應該盡力支持，況且寫書正是督促自己好好學習的機會。近代英國作家查斯特頓（G. K. Chesterton）說

³ 「數學方法論叢書」，徐利治主編，共有十三冊，在 1989 年至 1990 年間陸續由江蘇教育出版社出版。

過：“值得做的事即使做不好也值得做（If a thing is worth doing, it is worth doing badly）。”本著這句話的精神，我答應了徐教授為《叢書》寫一本。在這裏我要向他道謝，給我這個學習的機會和一直給我的鼓勵。不過，我錯估了自己的工作效率與可供寫作的時間，以致把交稿期限一拖再拖，謹在此向江蘇教育出版社的何震邦先生和王建軍先生衷心致歉，幸得兩位編輯的體諒及幫助，我才能安心完成書稿。話雖如此，真正下筆那段日子，回想起來也是挺緊張的。在日常的教學及研究中擠出時間，一有空便埋首寫作，大部分時間都磨在系裏工作間。在這方面，我也得感激妻子鳳潔及恆兒對我的體諒和支持。還有多位這些年來在數學及哲學問題上給我指點和提供資料的中外師友（包括那些只在書信往來上交流意見的朋友，甚至只會讀其書無緣當面討教的作者），亦一併在此向他們表示謝意。

最後，我想提及幾個本擬納入寫作計劃卻結果沒有談論的題材。第一個是機械化證明。最先引起我興趣的是吳文俊教授著的《幾何定理機器證明的基本原理》（科學出版社，1984年），後來蒙吳教授在一九八八年春寄贈文集（《吳文俊文集》，山東教育出版社，1986年），更被其主題吸引了。他說：“作為數學兩種主流的公理化思想與機械化思想，對數學的發展都曾起過巨大的作用，理應兼收並蓄，不可有所偏廢。”尤其他指出，中國古代數學，乃是機械化體系的代表，與古希臘數學之演繹推理典範，其實各具特色，各為數學發展作出了巨大的貢獻。這點更增進了我的興趣。與此有密切關係者是第二個題材，就是六十年代後期由已故美國數學家畢曉普（E. Bishop）倡導的構造型數學。畢曉普繼承了由克羅內克（L. Kronecker）至布勞威爾（L. E. J. Brouwer）諸人發展起來的數學哲學直觀主義流派，但打破了前人僅限於批判經典數學的框架，指出經典數學並非無用而只是未臻完善，有待且可以進行數學上的修補。這也帶引我們至第三個題材，即是數學的兩種面目——理論方面與算法方面，兩者之間的關聯與相互作用。這是很值得探討的問題，在電子計算機介入數學領域後，這個問題顯得更有意思也更趨迫切了。去年八月在匈牙利舉行的第六屆國際數學教育會議上，著名的匈牙利數學家羅瓦茲（L. Lovász）作了一個題為《算法化數學：舊事新談》的大會報告，指出了算法思想將為數學教育帶來新觀點並產生影響。另一篇值得參考的文獻是一個正反雙方辯論的論壇，題為《算法方式頂呱呱！》（刊登於 *College Mathematics Journal*, Vol. 16, 1985年, 2-18頁）。第四個題材與前述三個還是有關的，就是算法的複雜性理論，討論某種算法是否有效，對某種問題是否存在有效的算法。第五個題材是較近期的發展，叫做“零知識證明”（zero-knowledge proof），我還是在一九八六年夏天在美國柏克萊舉行的國際數學家會議上初次聽到的。說來像很玄妙，這種證明不把證明公佈卻仍能說服對方的確證明了命題！在電腦專家的圈子裏，這是個熱門話題。以上種種，都是我在構思期間、寫作期間和學習過程中碰到的材料，但只能淺嚐，未能深入理解。我總想找些時間多學一點，但至今辦不到，只好把它們定作學習目標，繼續探索吧。

數學上有種方法叫逐步逼近法，就是逐步接近解答。就某種意義來說，本書是運用這種方法進行了第一步逼近，寫下了一些個人這些年來的學習筆記。還有更多有待學習和思考的問題，只好期諸來日。本書希望表達的一個主題，是學習與理

解是連綿不斷沒有終結的過程，在寫作期間我深切體會到這一點！未做的希望做下去，已做的現在擺出來，就是以下十章的內容。錯漏自是難免，還望讀者不吝賜教，指出這些錯漏，批評斧正。

蕭文強 1989年2月 · 香港

《數學證明》再版序言（2008年）

二十二年前得到徐利治教授的鼓勵和支持，我著手寫作《數學證明》這本小書，並於一九九〇年作為徐教授主編的《數學方法論叢書》（江蘇教育出版社）第二輯其中一冊出版了。二十二年後竟然又再得到徐教授的支持，把這本小書重刊，作為他主編的《數學科學文化理念傳播叢書》（大連理工大學出版社）其中一冊，令我滿懷高興，更心存感激。

說來湊巧，台灣九章出版社的孫文先先生對這本小書也十分支持，他建議出版一個修訂本，並於去年冬天出版了。讀者如今看到的，就是那個修訂本，內容與第一版大致上沒有很大更改，只是添加了某些二十年前猶未曾曉得的數學結果（稱作「後記」）。

說來慚愧，二十年後的再版，本應有所更新，我卻做不到。尤其原版序言後面提及好幾項本擬納入寫作計劃卻沒有談論的題材，當時期諸來日作整理，如今仍然沒有兌現！除了學問沒有長進這個主要原因外，我只能推說二十年來的時間工夫，忙在別的方面吧。

不過，有幾項與數學證明這個主題很有關係的工作不妨一提，或者可以說明重版此書與數學科學文化理念有何關係。

（一）我最近寫了一篇文章，題為“Proof as a practice of mathematical pursuit in a cultural, socio-political and intellectual context（在文化、政治、社會、知識的層面觀看證明這項數學活動）”，將刊登於德國數學教育學報 *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 上⁴。文章採用四個例子說明題目標示的主題，用意在於顯示數學乃人類文化活動之一環，它的發展也就難免不受到別的文化活動所影響，亦難免不對別的文化活動帶來影響。因此，在教學上，我們不應無視這方面而僅將數學視為一種技能去傳授而已。那四個例子是：（1）在十五十六世紀之交，瀰漫於西歐航海探索年代的冒險奮進精神，給科學和數學研究注入新思維；（2）中國三國魏晉南北朝時代的政治局勢與哲學思潮，帶來「士」這個階層的群體自覺和個體自覺（按照歷史學家余英時先生提出的說法），孕育了當時中國數學家的治學態度和方式的

⁴ 已刊於 *ZDM*, 40 (2008), 355-361。

轉變，表表者如劉徽及祖沖之父子；（3）通過西漢時代的著述《淮南子》書內的量天之術，對道家思想於中國古代數學帶來的影響做了一些說明；（4）古希臘歐幾里得（Euclid）的經典巨著“Elements”（《原本》）在西方文化有其特殊的重要地位，該書在十七世紀初傳入中國後，在中國文化的影響又是怎樣？

（二）去年正好是《原本》給翻譯成中文的四百周年紀念。際此盛會，爲了紀念這一樁中西數學交融的重要歷史事跡，二〇〇七年十一月在台灣舉行的一個會議上我作了一個講演，寫成了「“歐先生”來華四百年」一文，刊登於二〇〇七年十二月的《科學文化評論》第四卷第六期（12-30頁），當中自然要提及數學證明這個觀念在古代東西方的異同。

（三）第十九屆 ICMI Study（國際數學教學委員會專題研究）定爲“Proof and proving in mathematics education（證明在數學教育）”，工作會議將於明年五月中旬在台北市舉行，數學證明在東西方文化的異同以及由此衍生對課堂上教學的啓迪，將會是會議的一項議題。

最後，我想起俄羅斯數學教育家沙雷金（Igor Fedorovich Sharygin）的一句話：「數學境界內的生活理想，乃基於證明，而這是最崇高的一種道德概念。」這句話正好呼應《數學證明》書內（第1章第5節）引用法國數學名家韋伊（André Weil）的另一句話：「嚴謹之於數學家，猶如道德之於一般人。」

蕭文強
2008年3月22日，香港

〔《數學證明》一書，完稿於1989年春，隔了將近二十年再版，添加了一些後記，這裏收錄了兩次出版的序言。〕