蕭文強,《1,2,3,…以外》,廣東教育出版社(1990);修訂本,香港三聯書局(1993);臺北書林(1994).

第三章
不用微積分能計算體積嗎?

(1983年2月、10月——香港數學學會普及講座)

如果有人問:“不用微積分能計算體積嗎?”你是否奇怪對方怎麼問一個這麼平凡甚至沒有意思的問題?有些物體的體積不用微積分也計算了,例如邊長是2cm的正立方體體積是8cu. cm,唸小學的小朋友也懂得;有些物體如圓球的體積公式,卻要待高年級學過微積分後才推算得到。所以,答案是有時用有時不用,答了等於沒答,可見問題沒大意思。有人會說:“微積分是十七世紀中葉才發展起來的,但古人在數千年前已經計算了不少物體的體積,你算不算他們是用了微積分呢?”也有人會說:“你為什麼一提問便是體積,為什麼不問面積,難道計算面積不必用微積分嗎?怎樣得到圓的面積公式呢?”問得好,下面我們慢慢來談。

1. 古代數學的體積計算

古代希臘有部數學巨著,叫做《原本》,由歐幾里德編纂,共十三卷。卷十二裏的第五條定理是這樣的:兩個等高三棱錐體積之比等於它們的底面積之比。這條定理相當於給

出三棱錐體積公式，原因是你可以把一個三棱錐$ABCD$嵌入一個三棱柱$AFE-CBD$(圖3.1)，這個三棱柱是由三個三棱錐組成，一個是原來的$ABCD$，另兩個是$ABDF$和$ADEF$。按照上面定理，$ABCD$和$ABDF$的體積相同(底面積ABC、BAF相同，且等高)，$ABDF$和$ADEF$的體積相同(底面積FBD、DEF相同，且等高)，所以$ABCD$體積是三棱柱的三分之一，但三棱柱體積是高乘底面積，所以$ABCD$體積是高乘底面積的三分之一。古希臘數學家怎樣證明定理五呢？他們先證明另一條定理(《原本》卷十二的第三條定理)：每個三棱錐$DACB$可剖分作四份，其中兩份是全等的三棱錐(a)，與$DACB$相似，另外兩份是體積相同的三棱柱(b)，而且b>a，所以兩個三棱柱的體積合起來大於原來三棱錐的一半體積(圖3.2)。剖法是在三棱錐中間攔腰斬一

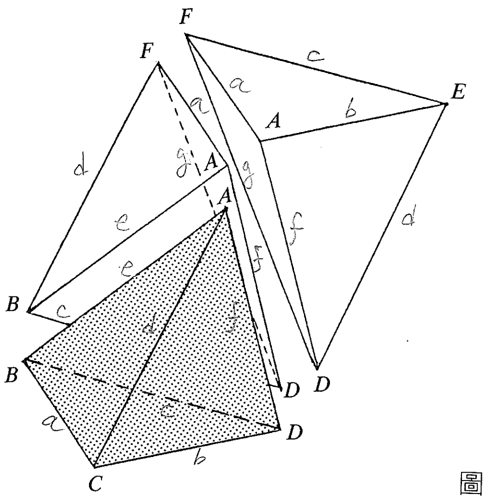

圖3.1

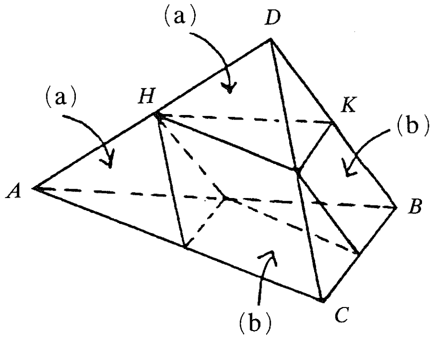

圖3.2

刀，再平行斜邊又斬兩刀。現在可以證明定理五了，設有兩個等高的三棱錐$DACB$和$D'A'C'B'$，為簡化敍述，讓我們假定它們的底面積相同，然後證明它們的體積也相同。如果V_1($DACB$的體積)大於V_2($D'A'C'B'$的體積)，便可以寫成$V_1=V_2+W$，W是某個正數。用剛才證明定理三的手法，從$DACB$剖得兩個小三棱錐，從每個小三棱錐又剖得兩個更小的三棱錐，如此這般，經過足夠多次後，得到一連串小三棱錐石階，總體積S比W還要小(這裏用了歐多克斯的窮竭法原理，請參看第二章第二節)，於是V_1-S大於$V_2=V_1-W$。對$D'A'C'B'$進行同樣的剖分，也得到一連串小三棱錐石階，總體積是S'(圖3.3)。因為底三角形ACB和$A'C'B'$面積相同，所以$V_1-S=V_2-S'$(試證明它)，那豈不是說V_2-S'大於V_2嗎？怎麼可能呢？只好承認V_1不大於V_2。同樣道理，也必須承認V_2不大於V_1，即是說$V_1=V_2$，定理證畢。

上面的證明真巧妙，古代希臘數學家多聰明。不過，我

國古代數學家也毫不遜色，在第二章第三節裏我們已經看到劉徽怎樣證明陽馬的體積公式，解釋了為何方錐體積是高乘底面積的三分之一。不論是歐多克斯的窮竭法原理或劉徽的"至細曰微，微則無形"，其實都蘊含無窮小的想法，後人依循這條思路，把它運用得更靈活，最出色的例子當推公元五世紀南北朝祖冲之父子運用"緣冪勢既同，則積不容異"這個原理計算圓球的體積(參看第二章第三節)。這個原理的"洋版本"叫做卡瓦列利原理，在西方遲了一千多年後才出現。很多教科書便是運用這個原理證明三棱錐(或方錐)的體積公式，基本上是證明如果兩個三棱錐在等高處的截面面積相同，它們的體積也相同。這種手法與前面提過的兩個計算方法本質上是沒分別的，都用了無窮小概念，我們說這些計算是用了微積分。

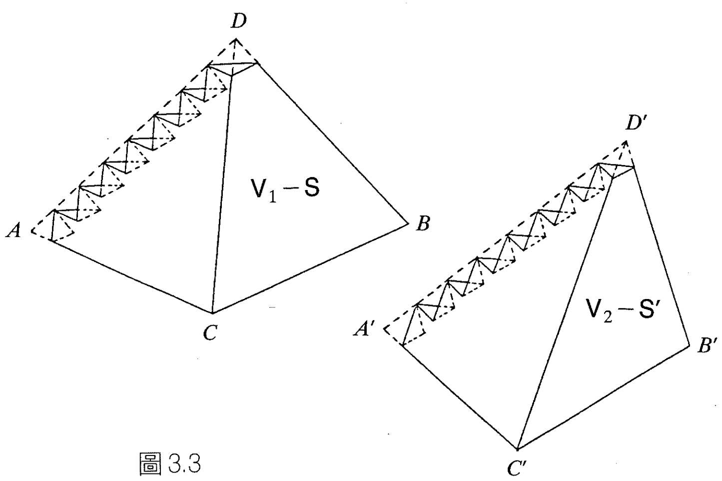

圖 3.3

2. 什麼是面積和體積?

上一節說明了什麼計算叫做用了微積分，你會問："那麼計算立方體體積算不算用了微積分?"不如讓我們退一步，先談談面積好嗎?

下圖是一隻小手掌(圖 3.4)，當我們說它的面積是 61.84 sq. cm.，意思是什麼? 怎樣把差不多 62 個邊長是 1 cm. 的小方格填滿小手掌呢? 換句話說，什麼叫做面積? 如何計算面積?

粗略地說，對每個圖形賦予一個數量，以比較圖形的大小，這個數量叫做圖形的面積。當然，這不是一個嚴謹的定義，我還沒有指出這個數量應該滿足什麼條件，不過這是一個正確方向，我們將朝此方向前進。我們可以這樣想：把一張方格紙蓋在小手上，每個方格是 1(為省唇舌，以後不提量度單位了)，數數至少要多少個方格才能完全遮蓋了小手，又數數至多有多少個方格完全躺在小手裏面。譬如說前

圖 3.4

一個數是68，後一個數是16，那麼小手的面積應是一個在68與16之間的數(圖3.5)。現在把每個方格分成100個相同的小方格(把每邊分為10等分)，重複剛才的數法。譬如說前一個數是6532，後一個數是2841，那麼小手的面積應是一個在65.32與28.41之間的數。再把每個小方格分成100個相同的小方格，重複剛才的數法，又得到兩個數，譬如說是620184和416792，那麼小手的面積應是一個在62.0184與41.6792之間的數。這樣一直做下去，有理由相信格分得越細，那兩個數便越接近，小手面積是夾在中間，所以應是兩串數列{68, 65.32, 62.0184, …}和{16, 28.41, 41.6792, …}的公共極限。(懂微積分的讀者可試證明這回事，要用到有界單調數列定理。)

你或者認為這樣合情合理的事情是常識而已，哪值得談？且慢，不要太快相信我說的話，是否所有圖形都有這麼好的性質呢？下面是個這樣的圖形，在單位圓上取兩條互相垂直的直徑，把每個由這兩條直徑構成的角平分，又多畫兩

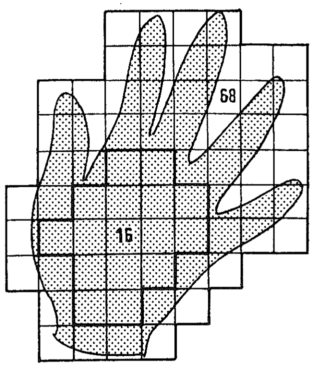

圖3.5

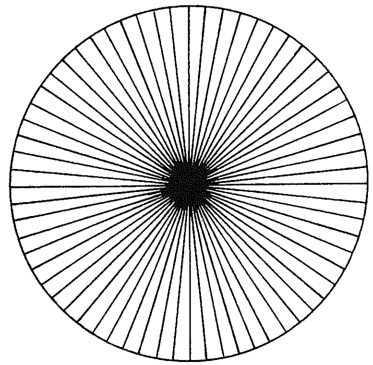

圖3.6

條直徑，把每個由這四條直徑構成的角平分，又多畫四條直徑，把每個由這八條直徑構成的角平分，又多畫八條直徑，不停地繼續下去，囊括全部這些直徑上的點，構成一個像大毛球的圖形(圖3.6)，它卻不是全個單位圓的內部，因為有些直徑沒給包羅了(為什麼？)。如果按照剛才的“內外夾攻法”，上層數列是一串越來越接近π的數，下層數列是一串0，於是前者的極限是π，後者的極限是0，難道說$\pi=0$嗎？有時，甚至連圖形是面是綫也叫人撲朔迷離，波蘭數學家夕爾賓斯基(Sierpinski)在1916年便設計了一張這樣的“地氈”。他把一張好好的地氈分成九宮格，剪掉中間一格，餘下每格又分成九宮格，剪掉中間一格，如此這般，無窮無盡地做下去，結果地氈變成什麼樣子呢(圖3.7)？在任何一個階段，地氈雖是千瘡百孔，總還是連成一片，當然是一個面了，不停地做下去，還是一個面吧？但這樣下去，地氈卻沒有一處是完整的一片，可謂體無完膚，只剩下縱橫貫通的綫，又怎麼會是一個面呢？難道是一條綫嗎？

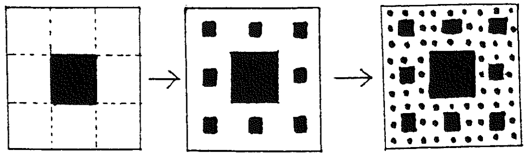

圖 3.7

既然我們明知有這類不好惹的傢伙潛伏在四周，不如避之則吉，只考慮那些按照上述“內外夾攻法”得到趨於同一極限的數列的圖形吧，暫時讓我們稱它們為“可測度圖形”，自然地那個公共極限便叫做它的面積了。不過還是有問題，如果你把圖形斜放了，或者移上移下，結果是否一樣呢？答案是不明顯的，譬如把方格紙斜放在剛才的小手掌上，數數完全遮蓋小手的方格有 66 個，完全躺在小手裏面的方格有 14 個（圖 3.8），不再是剛才的 68 和 16 了，你又怎能保證這樣做下去，“內外夾攻法”得到一個公共極限？即使得到了，又怎能保證它就是剛才的 61.84 呢？

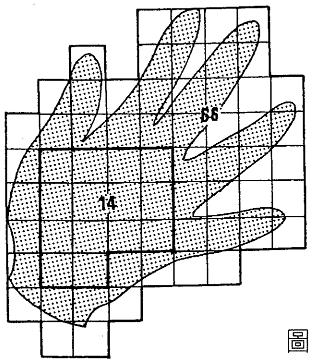

圖 3.8

一個解決辦法是設法從面積這個直觀概念提煉它的精髓，撇除了不必要的旁支細節，集中火力以捕捉面積的要義。這就是數學上所謂公理化處理，目的在於抓緊研究對象的本質，精簡統一已有的知識，希望藉此深入了解並拓廣知識領域。可惜這種處理手法常被外人誤解，以為數學就是五花八門的公理系統，數學家躲在自己的小天地裏閉門造車，更而甚者，有人以為數學是沒有實在意義而是按人為規則去玩的智力遊戲！其實，公理化處理必須求助於知覺和想像，就拿目前的問題說吧，我們的目標是對全部可測度圖形來個一致評比，每個圖形 S 應該有個數 $m(S)$，叫做它的面積，要求它滿足某些條件。條件定得過寬，便有很多不同的“候選人”；條件定得過緊，可能找不着“候選人”。怎樣才能把條件定得恰到好處，正所謂“增一分則太肥，減一分則太瘦”，以便確定一個唯一的“候選人”呢？我們也說條件界定了該項概念，或者說條件是定義該項概念的公理。這些條件必須反映直觀概念的屬性，目前的討論對象是面積，它有以下明顯的屬性：

（1） 面積不是負數。

（2） 面積可相加，即是說若 S_1 和 S_2 不重疊地組成 S，則 S 的面積等於 S_1 的面積加上 S_2 的面積。

（3） 平移圖形不變更它的面積。

（4） 邊長是 1 的正方（單位方）的面積是 1。

讓我們把這些屬性寫成下面的公理：

（A1） $m(S)$ 不是負數。

（A2） 若 S_1 和 S_2 不重疊地組成 S，則 $m(S_1)+m(S_2)$

$=m(S)$。

(A3) 若 S' 是 S 的平移，則 $m(S)=m(S')$。

(A4) 若 S 是單位方，則 $m(S)=1$。

漂亮的事情是：對每個可測度圖形 S，有辦法賦予滿足(A1)至(A4)的 $m(S)$，而且得到的 $m(S)$ 是唯一決定了。剛才用的“內外夾攻法”是一個辦法，可能有其它辦法，不過只要得到的 $m(S)$ 滿足(A1)至(A4)，那麼它必定等於用“內外夾攻法”得來的 $m(S)$。這個證明比較繁複，我們略去了。

於是我們定義了可測度圖形的面積，不過頭一條定理會使你大失所望，它是那麼平凡：邊長是 a 和 b 的矩形是可測度圖形，面積是 ab。它真的是這麼平凡嗎？仔細想一想，卻不盡是，因為當我們採用公理法處理後，面積只不過是滿足(A1)至(A4)的東西，許多看來似是非常簡單的事情，還是需要證明的。外人不明白數學家的工作方式，以為數學家都是一些吹毛求疵的討厭傢伙！話得說回頭，上述事情，即使不論是否用了公理化處理，本身還是不簡單的，試想你怎樣用 π 個單位正方鋪滿一個邊長是 1 和 π 的矩形呢？這個看似簡單的定理的證明，並非三言兩語能交待過去的，我們也不敍述了，我只想提醒讀者一句，這是個相當重要的結果。

現在讓我們再仔細審視一下(A1)至(A4)這四個條件。(A2)和(A3)支持了一個由來已久計算面積的方法，就是所謂剖拼法，要計算一個圖形的面積，可以把它剖分成若干份，重新拼成另一個圖形，新圖形的面積與原來圖形的面積是相同的。因此，如果新圖形是個面積容易計算的熟悉圖形，原圖形的面積也就計算了。例如，兩個全等三角形合成一個平行

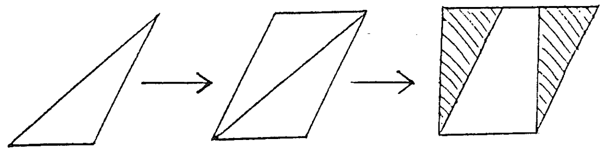

圖 3.9

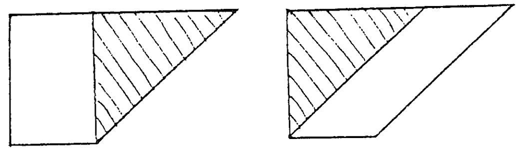

圖 3.10

四邊形，而平行四邊形可剖拼成一矩形(圖 3.9)，所以三角形面積是高乘底之一半。細心的讀者會問：“這樣做不保證行得通，平行四邊形很斜時怎辦？”古人也顧及這一點，發明了剖拼法的變着，叫做剖補法，就以上面的問題為例，我們給矩形和平行四邊形都補上同樣的圖形，得到兩個同樣的圖形(圖 3.10)，所以平行四邊形的面積與矩形的面積相同。

在東西方古代數學文獻裏，充滿這些運用剖拼法和剖補法的例子，最富趣味的重要例子便是古代數學家給勾股定理的證明，下面是其中四個，每個由讀者看圖自行推敲吧：第一個類似魏晉趙爽的弦圖(圖 3.11)，證明了直角三角形斜邊上的正方等於另外兩邊上的正方之和；這也是十二世紀印度數學家婆什迦羅(Bhaskara)的證明，他在書上什麼也沒書寫，除了圖以外只有一句“看呀！”第二個是九世紀阿拉伯數學家塔比伊本哥拉(Tabit Ibn Qorra)的證明(圖 3.12)，同時也說明了怎樣把兩個正方形剖拼成一個大正方形；第三個靈感源自

前兩個，讀者看圖自明(圖3.13)；最後一個是十五世紀文藝復興期的達芬奇(Leonardo de Vinci)的證明(圖3.14)，與前面三個相比，有點新意。說過了(A2)和(A3)，再看(A1)和(A4)。(A4)只是為了定單位吧，本質上是不如其它三個公理那麼重要，反而貌不驚人的(A1)卻是內容最深刻的一個公理！你不相信嗎？如果丟下它不理，即是只要求$m(S)$滿足(A2)、(A3)和(A4)，便沒辦法證明矩形的面積公式的。

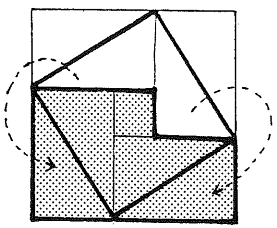

圖3.11

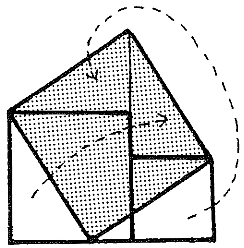

圖3.12

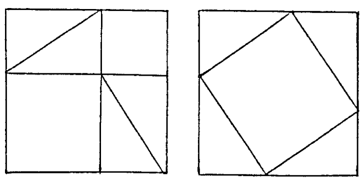

圖3.13

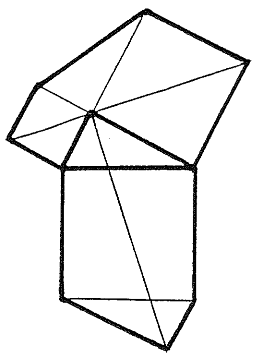

圖3.14

這裏說沒辦法並非是不知道有沒有辦法，而是肯定沒有辦法，因為能找到一個"面積"的定義，滿足(A2)、(A3)和(A4)，卻不滿足(A1)，而且在這個"面積"意義底下，矩形的"面積"是個負數，怎麼可以是長乘闊呢？(讀者可試找一個這樣的"面積"定義，不過先說一聲，那並非是一件容易的工作。)不妨指出(A1)是怎樣溜進矩形的面積公式的證明中，原來在面積理論裏很多定理的證明都倚靠一條這樣的定理(其實是"內外夾攻法"的理論根據)：S是個可測度圖形，A_1、A_2、…和B_1、B_2、…也是可測度圖形，而且A_n和B_n把S夾在中間($n=1$，2，…)，A_n在B_n裏，如果當n越來越大時，$m(B_n-A_n)$趨於零，則$m(A_n)$趨於$m(S)$為極限(圖3.15)。要明白這個定理為何成立是不難的，只需注意B_n-A_n是由B_n-S和$S-A_n$組成，而且兩者不重疊(圖3.16)，所以$m(B_n-A_n)=m(S-A_n)+m(B_n-S)\geqslant m(S-A_n)\geqslant 0$，由於$m(B_n-A_n)$趨於零，所以$m(S-A_n)$也趨

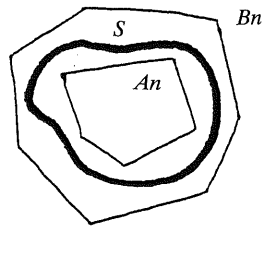

圖3.15

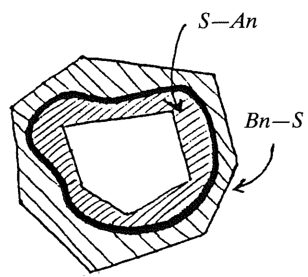

圖3.16

於零。同樣推理，由於$m(S)-m(A_n)=m(S-A_n)$，所以$m(A_n)$趨於$m(S)$。在推理過程中，我們已經不只一次用了面積不是負數這回事了。運用這個定理，其實便是用了微積分的想法；運用這個定理，也就是借重了(A1)。所以，凡是用了(A1)的計算，便是用了微積分。既然連矩形面積公式也用了(A1)，豈不是全部面積計算也用了微積分？嚴格地說，的確如此，不過我們通常放寬一點，接受了矩形面積公式而“英雄莫問出處”，那麼還有什麼圖形的面積是不必再用(A1)便計算得到呢？不用(A1)即是只許用(A2)至(A4)，也就是只許用剖拼(補)法，這樣做我們仍然說計算是不用微積分的。

我們已經知道三角形可剖拼成矩形(圖3.17)。如果任意多邊形可剖分成若干個不重疊的三角形，便能斷言多邊形面積計算不用微積分了。對凸多邊形來說(凸的意思，是指任何連結多邊形內兩點的綫段都躺在多邊形裏)，這容易辦到，只用把一個端點連結其它端點就成。對凹多邊形來說，這也是辦得到的，其實，我們甚至可以把一個任意N邊形(凸的或凹的)分成$N-2$個不重疊的三角形，所有三角形的端點都是原來多邊形的端點(圖3.18)。不過，在這裏讓我只證明一個較弱的結果，即是可把多邊形剖分成不重疊的三角形。先把多邊形P的每條邊延長成為平面上的一條綫，這些綫把平面分成若干個凸區域(圖3.19)。這些凸區域，或者完全躺在P裏面，或者完全躺在P外面(因為沒有P的邊能穿過它們)。所有躺在P裏面的凸多邊形不重疊地組成P，對每個這樣的凸多邊形進行剛才描述的剖分就是了。

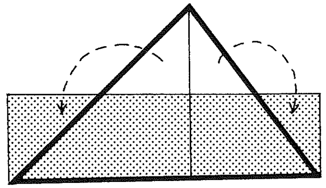

圖3.17

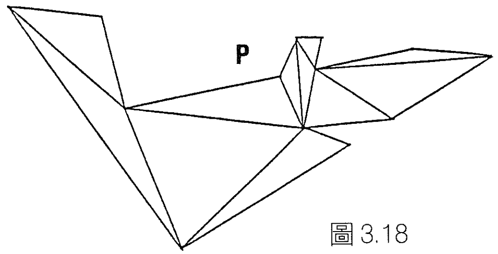

圖3.18

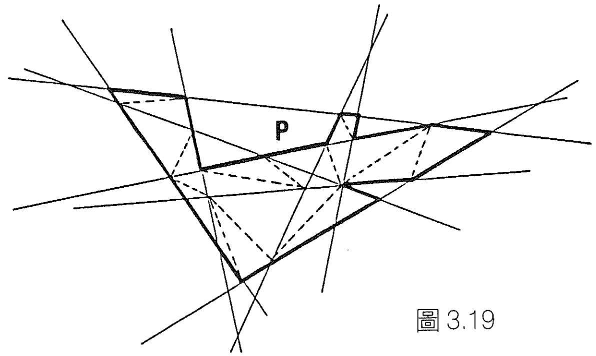

圖3.19

從上面的討論，可知多邊形面積計算不用微積分，讓我們從二維世界爬上三維世界吧，類似地我們先定義可測度物體S的體積$m(S)$，把方格換作立方，把(A1)至(A4)換作下面的(V1)至(V4)：

(V1)　$m(S)$不是負數。

(V2)　若S_1和S_2不重疊地組成S，則$m(S_1)+m(S_2)=m(S)$。

(V3)　若S'是S的平移，則$m(S)=m(S')$。

(V4)　若S是單位立方，則$m(S)=1$。

同樣地，可以證明存在一個唯一的$m(S)$滿足這四條公理，也可以證明邊長是a、b、c的長方體是可測度物體，體積是abc。自然，證明是借重了(V1)的，我們可以提出類似二維情況的問題："如果接受了長方體的體積公式後，是否單靠剖拼(補)法能計算多面體的體積呢？"用類似二維情況的手法，我們可以把任意多面體剖分成若干不重叠的三棱錐，所以只要把三棱錐剖拼(補)成長方體便解決了問題。我們在第一節看過怎樣把三棱錐嵌入三棱柱，而三棱柱是不難剖拼成長方體的(怎樣做？)。不過在這個關節上卻出現一個難題："怎樣用剖拼(補)法證明組成那三棱柱的三個三棱錐有相同的體積呢？"換句話說，怎樣用剖拼(補)法證明第一節提到的定理五呢？我們需要證明給定兩個同高同底面積的三棱錐，一個可由另一個剖拼而成。下一節我們便討論這個問題。

3. 希爾伯特第三問題

1900年夏天，第二屆國際數學家大會在巴黎舉行，德國著名數學家希爾伯特應邀在會上作一個主要報告。1900是一個新世紀的開始，希爾伯特希望發表一篇與這個重要時

機相稱的演講，便詢問好友閔可夫斯基(Minkowski)的意見，閔可夫斯基回信告訴他說："最有吸引力的題材，莫過於展望數學的未來，列舉在新世紀裏數學家應當努力解決的問題。這樣一個題材，將會使你的講演在今後幾十年內成為人們議論的話題。"希爾伯特採納了好友的提議，在1900年8月8日上午在大會上發表了著名的講演《數學問題》。在演講中他強調了決定一門學科發展方向的問題的重要，考察了重大問題的特點、對問題解答的要求，並且討論了二十三個個別問題，後來被稱為"希爾伯特的二十三個問題"。果然不出閔可夫斯基所料，這二十三個問題至今仍然是數學家津津樂道的話題，有些給解決了，有些給部分解決了，有些取得很大進展，有些只有零星的收獲，但無論怎樣，這些問題對本世紀的數學研究產生了重大的影響。

希爾伯特的第三個問題說："在給哥靈(Gerling)的兩封信中，高斯(Gauss)對於一些立體幾何的定理依賴於窮竭法，即依賴於現代用語中所說的連續公理(或阿基米德公理)而表示不滿。高斯特別提到歐幾里德定理，這定理說：'兩個等高的三棱錐，其體積之比等於底面積之比。'現在，平面上的類似問題已經解決。哥靈還通過將圖形剖分為全等的部分來成功地證明了兩個對稱多面體體積之相等，雖然如此，我認為對於剛才提到的歐幾里德定理，似乎不可能作這種一般的證明，我們的任務則是給這種不可能性以嚴格的證明。這是可以做到的，只要能夠成功地舉出兩個等高等底的四面體，我們不能將它們剖分為全等的四面體，同時也不能拼補上全等的四面體，使形成兩個本身可以剖分為全等部分

的四面體。”讀過上一節，讀者應該知道希爾伯特提出這個第三問題的含義，他要證明多邊形面積理論和多面體體積理論有本質上的區別，前者不用微積分(如果你接受矩形面積)，後者卻必須用微積分(即使你已接受長方體的體積公式。)

4. 怎樣剖拼圖形?

希爾伯特第三問題裏寫着“平面上的類似問題已經解決”，是指什麼呢？原來早在1832年匈牙利數學家鮑耶(F. Bolyai)(他的兒子小鮑耶(J. Bolyai)因發現非歐幾何而名垂史册，比他的父親更為著名)和另一位喜愛數學的德國軍官哥溫(Gerwin)分別獨立地發現一條有趣漂亮的定理：如果兩個多邊形面積相同，一個必可由另一個剖拼而成。因此，理論上所有剖拼圖形的玩意變成沒好玩了。下面我們證明這條定理時，其實介紹了一個剖拼的辦法。不過，那可能是一個十分笨拙的剖拼法，往往要剖成很多片；但如果你望着圖形靈機一觸，也許只用剖成兩三片便能巧妙地拼成。通常這類玩意規定只許剖多少次，或者要求剖分片片數最小，所以還是引人入勝的，尤其要求剖分片片數最小這個問題，距離解決猶遠，主要困難是怎樣肯定沒有更少片數的剖分。有位叫連格仁(Lindgren)的澳大利亞公務員特別精於此道，是很多圖形最小剖拼的“紀錄保持者”，下面的表列舉了他的一小部分紀錄(至1968年為止)，表中的數字就是從行圖形剖拼成列圖形的已知最小剖分片片數(圖3.20)，例如把正六邊形

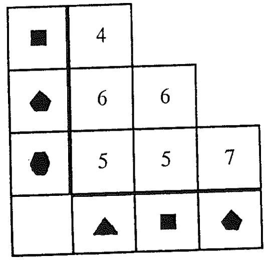

圖3.20

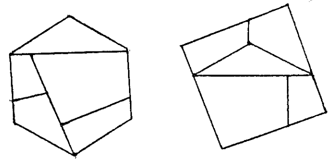

圖3.21

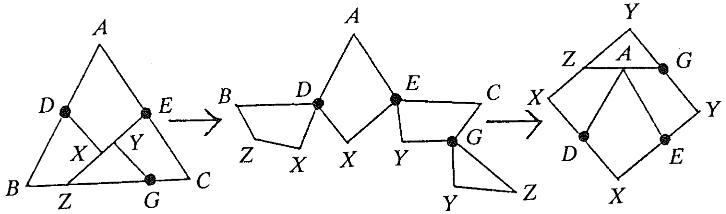

圖3.22

剖拼成正方形，已知最小剖分片片數是5，下面是一個這樣的剖拼(圖3.21)。

最有趣的一個剖拼圖形是英國謎題大師杜但尼(Dudeney)在1902年設計的，他把正方形分成四份，拼成一個正三角形，還在適當的地方絞接，使它可以從一個圖形不斷開地變成另一個(圖3.22)。我們也可以用這種剖分來密鋪平面，正看是一行一行的正三角形，斜看是一行一行的正方形，很漂亮的(圖3.23)。讀者想不想自己做一個這樣的玩意呢？請你計算一下剖分綫的位置。(答案是：設ABC邊長是2，那麼D和E各是AB、AC的中點，EZ長$\sqrt[4]{3}$，ZG長1，DX和GY垂直於EZ)。

怎樣證明鮑耶—哥溫定理呢？為了方便敍述，我們引進少許記法：如果多邊形P和Q當中一個經適當剖分可拼成另一個，便說P和Q是等組的，記作$P\sim Q$。首先注意一件事，如果$P\sim R$和$R\sim Q$，則$P\sim Q$。證明並不難，先把P剖

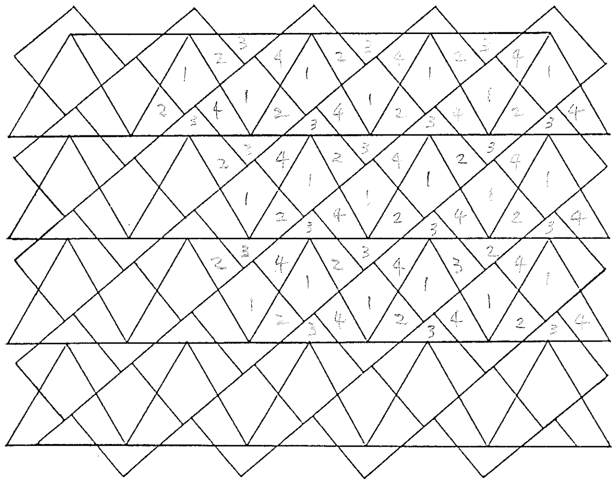

圖 3.23

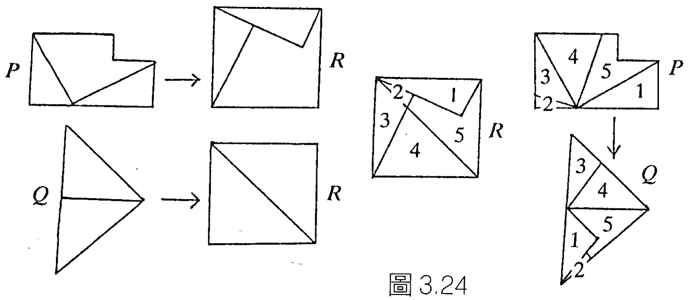

圖 3.24

分後拼成R，把這個拼法畫在一張紙上，把Q剖分後拼成R，想像這個拼法是畫在一張看得透的薄紙上，把薄紙上的R覆蓋在前一張紙上的R，便可以見到一個對R的更細緻的剖分，也就是把P剖分後拼成Q的方法了(圖 3.24)。所以我們只需要證明任意多邊形P和一個面積相同的正方形S是等組便成。這是分四個步驟進行：(1)先把P分成若干個三角形；(2)把每個三角形剖拼成矩形；(3)把每個矩形剖拼成正方形；(4)把一堆從上面步驟得來的正方形剖拼成一個大正方形S。在第二節裏我們已經做了(1)，也做了(2)，也做了(4)(見塔比伊本哥拉的證明)，只剩下(3)這關鍵的一步，讓我們試試。

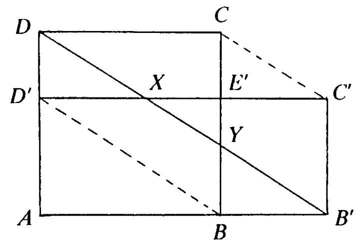

圖 3.25

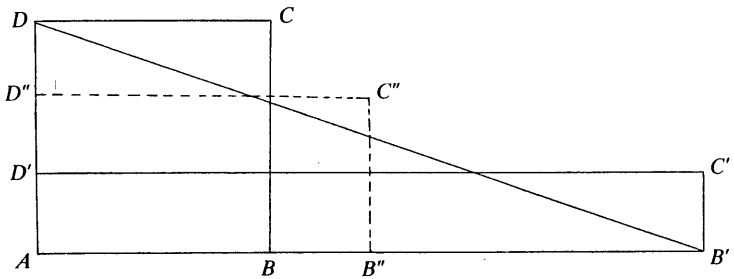

圖 3.26

先來看一個特殊情形，設$ABCD$是個正方形，$AB'C'D'$是個面積相同的矩形(AB'是較長的一邊)，並假設DB'與BC交於BE'內(圖3.25)。只要能證明$D'B$、DB'和CC'都是平行的，剖拼方法便十分明顯了，沿着$B'X$與BY剪開，把三角形$C'XB$斜移到三角形CDY的位置，再把三角形$BB'Y$斜移到三角形$D'XD$的位置就是了。懂得相似三角形和平行四邊形性質的讀者可試證明上述三條綫平行這回事(注意到$AD \cdot AB = AD' \cdot AB'$，因為正方形與矩形面積相同)。這裏加了$DB'$與$BC$交於$BE'$內的額外要求，直覺上是要求矩形$AB'C'D'$不可過於狹長。事實上，我們可以用精確的數學語言來描述這個要求，就是$4AD'$不能小於AB'(讀者試推導之，記得$AD^2 = AD' \cdot AB'$)。如果事與願違，即是AB'大於$4AD'$，那怎辦？沒關係，只要逐漸把矩形"胖"起來便成，當然在過程中面積必須保持不變的。正式的做法是把AB'縮小一半成AB''，把AD'擴大一倍成AD''，於是矩形$AB''C''D''$的面積與原來的矩形$AB'C'D'$相同，至於AB''是否大於(或小於)$4AD''$，則視乎AB'是否大於(或小於)$16AD'$(圖3.26)。因此，只要把這種手法重複足夠多次後，是不愁得不着一個面積與正方形相同而又不過於狹長的矩形的，到了那個時候，便回到先前的特殊情形，就解決了。

這樣，我們證明了鮑耶—哥溫定理，還提供了一個可行的辦法，不過，正如前面提過，這樣得來的剖分，可能很繁複。看一個實例吧，按照剛才的步驟，我們得到一個從正方形到正六邊形的剖分(圖3.27)，共分成十八塊，但其實只用分成五塊已經辦到的(見圖3.21)。

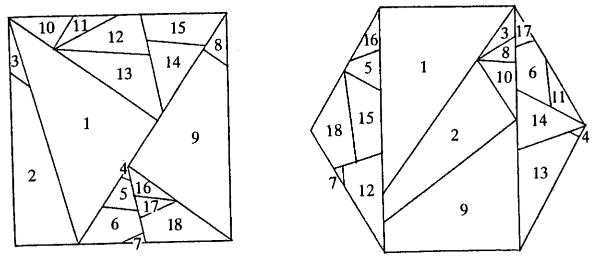

圖3.27

5. 剖拼圖形的變着

有時，把一個多邊形P剖拼成另一個多邊形Q，有些剖片給翻轉了放。如果多邊形P是用一張底是黑色面是白色的紙板做成，就看得更清楚了，因為拼成的Q並不是全白的(圖3.28)。能否保證剖拼成的Q仍然是全白呢？換句話說，只容許平移或旋轉剖片，卻不容許翻轉它，有沒有辦法由P剖拼成Q？先聽我說一個故事吧，有位糊塗餅師做了一個蛋糕，面上鋪了一層美味鮮奶油，他還做了一個與蛋糕形狀一樣的盒子用來盛它。等到他把蛋糕拿起打算放進盒裏才發現不妥，糟糕！原來蛋糕是個不規則三角形，而盒子卻掉轉了糊，變成是那個三角形的鏡像，但奶油蛋糕可不能翻轉放呀，怎辦呢？結果他的一位數學家朋友教他一個辦法，把蛋糕切成數塊，重新拼砌，恰好放在盒裏，你想應怎樣切呢？關鍵在於三角形的內心(三個角的角平分綫相交點)與三邊等距，如下圖所示的切法就成(圖3.29)。聽罷這個故事，你應該曉得這一節開首的問題的答案吧？首先，把P剖成若干個多邊形拼成Q，每塊多邊形剖片可分成三角形，有些三

角形或許需要翻轉過來，但不打緊，凡碰到這種三角形便仿效糊塗餅師的切法就是了。

證明鮑耶—哥溫定理時，當然要用到兩個圖形面積相等這回事，那是個必要條件，否則便叫人吃驚。給你一個蛋糕，切數刀擺弄一番可拼成另一個更大的蛋糕，再切數刀又擺弄一番拼成另一個更大的蛋糕，豈非大佳！不過，的確有個具有類似性質的數學奇論，是波蘭數學家巴拿赫(Banach)和塔斯基(Tarski)在1924年提出的，説明怎樣在N維($N \geqslant 3$)歐幾里德空間裏把一個點集分成有限多份，拼湊成另一個任意的點集。我們沒辦法在這裏解釋這個奇論的證明，但理論上的確可以把一粒小豆擺弄一番，重組成一個太陽那麼大的物體呢！

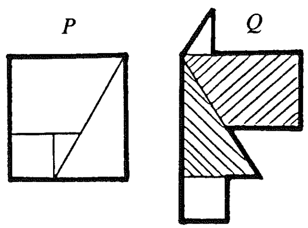

圖 3.28

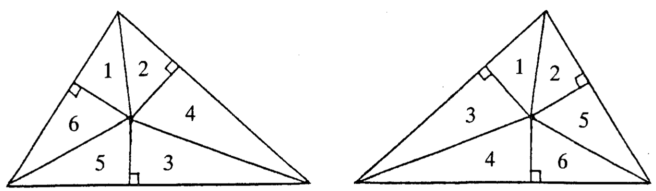

圖 3.29

塔斯基在1925年也提出另一個與剖分有關的問題，直至1989年才有突破發展。在上一節討論的剖拼，剖片都是多邊形，邊界是由直綫綫段組成。如果容許剖片的邊界是彎曲的綫，能否把鮑耶—哥溫定理推廣到比較多邊形更廣泛的一類圖形呢？譬如問，能否把一個單位圓剖拼成一個面積是π的正方？很難想像能辦到，但也很難證明這是辦不到的。在1989年春有位匈牙利數學家拉高域治(Laczkovich)解答了這個問題，他證明這是辦得到的！

6．希爾伯特第三問題的解答

在第四節我們介紹了鮑耶—哥溫定理：等面積的多邊形必等組。希爾伯特第三問題(見第三節)是懷疑這個定理能否推廣到三維情況的多面體去。就在希爾伯特發表講演後不久，在同一年他的一位學生德恩(Dehn)解答了這個問題，成為第一位解答了某個“希爾伯特二十三個問題”的數學家。德恩證明了不能把一個正立方體剖拼成一個正四面體(或稱正三棱錐)。嚴格地説，因為只有一個物體是四面體，這還未算完全解答第三問題，不過根據他的想法稍加計算，是可以找到一對四面體，正正式式滿足希爾伯特第三問題的要求，下面是一對這樣的四面體(圖3.30)BC，CD，AB兩兩垂直，$C'D'$，$B'C'$，$A'C'$兩兩垂直。要詳細介紹德恩的例子，需要較多的篇幅，讓我只勾劃一個輪廓，點出關鍵就算了。假定P和Q是兩個等組的多面體(我們沿用第四節的術語)，考慮P的全部二面角(任何兩個面的夾角)A_1，…，A_n

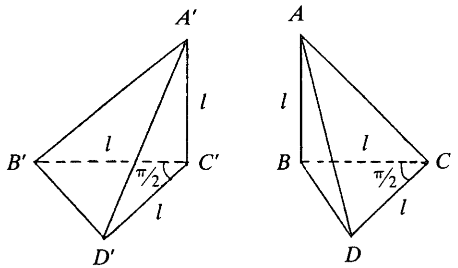

圖 3.30

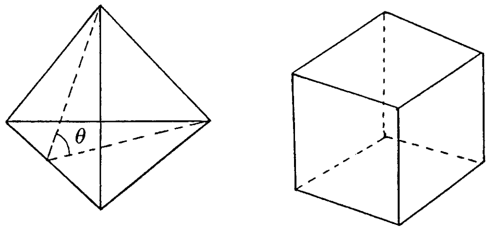

圖 3.31

和Q的全部二面角B_1，…，B_m(角是以弧度量度的)。德恩證明了必有正整數P_1，…，P_n和q_1，…，q_m及整數p_{n+1}，q_{m+1}使得 $p_1A_1+\cdots+p_nA_n+p_{n+1}\pi=q_1B_1+\cdots+q_mB_m+q_{m+1}\pi$，於是他把原來的幾何問題化為一個非常具體的代數問題，可以進行計算。正四面體P有六個二面角，每個是θ，而$\cos\theta=1/3$(試驗算之)，正立方體有十二個二面角，每個是$\pi/2$(圖3.31)。按照上面說明，如果P和Q等組，便有$(p_1+\cdots+p_6)\theta+p_7\pi=(q_1+\cdots+q_{12})\pi/2+q_{13}\pi$，化簡後得$k\theta=s\pi$，這裏的$k$和$s$都是整數，所以$\cos k\theta=\pm1$。但因為$\cos\theta=1/3$，對任何整數$k$，$\cos k\theta$都不可能是整數的，遑論$\pm1$了(見第七節附錄)，這是個矛盾，因此$P$和$Q$不可能等組。

其實，在1896年布里卡(Bricard)已經指出這樣的結果，但他的證明含有一個無可補救的漏洞，四年後德恩才以不同的方法證明了同樣的結果。但德恩的這篇論文並不易讀明白，直到這個世紀的五十年代瑞士數學家哈維格(Hadwiger)在這方面做了不少重要的工作，把德恩的理論以代數形式表述得清澈易明。另一位瑞士數學家西勒(Sydler)和丹麥數學家耶臣(Jessen)在六十年代沿着這個方向更進一步推進了德恩的想法，得到一個關於兩個多面體是否等組的充要條件，把等組問題納進一套內容豐富且深刻的理論，不單是外表看似消閒遣悶的玩意而已！

回到圖3.30的兩個四面體吧，左邊那個有六個二面角，其中三個是$\pi/2$，三個是θ，而$\cos\theta=1/\sqrt{3}$(試證明之)。如果它和正立方體等組，類似剛才的計算知道成立$\cos k\theta=\pm1$，k是個整數，也類似剛才的推論(見第七節附錄)，可獲致矛盾，所以左邊的四面體不能與正立方體等組，但是右邊那個四面體卻與三棱柱等組(見圖3.32)，而明

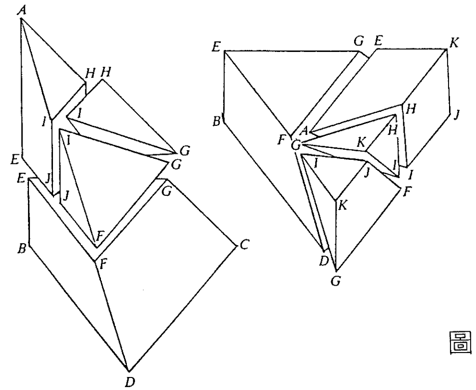

圖 3.32

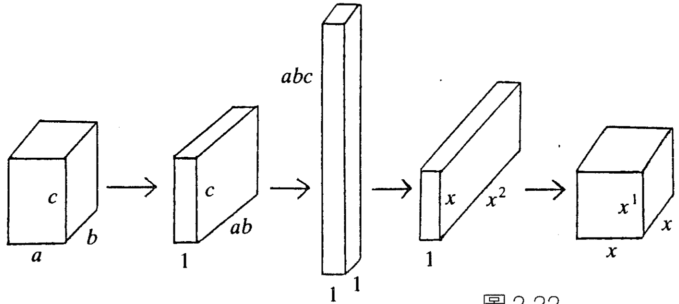

圖 3.33

顯地三棱柱可剖拼成長方體(怎樣做?)，長方體又可以剖拼成立方體(見圖 3.33)，所以右邊的四面體與正立方體等組，因此不能與左邊的四面體等組了。但是，它們等高，也有相同的底面積。順帶說一句，右邊的四面體是英國數學家希爾(Hill)在 1896 年發現的。

至此，我們可以回答這一章開首提出的問題了。不用微積分是不能計算體積的。說得準確一些，即使你接受了長方體的體積公式，如果不准用微積分的想法(特別地，不准用無窮小這個概念)，就連三棱錐這麼簡單的多面體的體積你也算不出來。這一點與二維情況相比是有本質上的差別，因為在二維情況，只要你接受了矩形的面積公式，不用微積分是可以(至少理論上)計算任何多邊形的面積。

不過，這一章希望帶出的還不單是這個問題的答案，更重要的是通過一個有趣、漂亮、易於陳述卻又內容深刻且富有潛力的問題(希爾伯特第三問題)說明問題對數學發展的重要作用。希爾伯特本人在講演中便道出這種精神，他說："只要一門科學分支能提出大量的問題，它就充滿着生命

力；而問題缺乏則預示着獨立發展的衰亡或中止……正是通過這些問題的解決，研究者鍛煉其鋼鐵般的意志和力量，發現新方法和新觀點，達到更廣闊更自由的境界。"

7. 附錄

要證明這樣的一件事：若 $\cos\theta = 1/n$，則對任何整數 k，$\cos k\theta$ 不是整數。其實我們可以證明一個更細緻的結果：(1)若 n 是奇數，則 $\cos k\theta = A/n^k$，A 與 n 互素。(2)若 n 是偶數，則 $\cos k\theta = B/2(n/2)^k$，$B$ 與 $n/2$ 互素。兩個結果都是對 k 進行數學歸納法便輕易得到，只需注意一條公式：$\cos(k+1)\theta = 2/n \cos k\theta - \cos(k-1)\theta$，讀者自行驗算吧。用類似的手法，可以證明：若 $\cos\theta = 1/\sqrt{n}$，n 是奇數，則對任何整數 k，$\cos k\theta$ 不是整數(為什麼要求 n 是奇數呢？)。