新高中數學課程知識增益

面積與體積（**2012 年 3 月 2 日；2012 年 6 月 11 日**）

引言（蕭文強）

古代希臘人對幾何學的貢獻，眾所周知。有位數學家把它總結如下：「作為圖形量度意義底下的幾何學，是由許多文化自發地發展的，始於公元前幾千年。我們今天所認識的幾何學，即根據理想圖形的抽象表述，驗證其真確性只需要純粹推理，則是由希臘人創造的。」（Saul Stahl*, The Poincaré Half-Plane: A Gateway to Modern Geometry*, 1993）

有「歷史之父」之稱的希臘學者希羅多德（Herodotus，公元前五世紀）在其名著《歷史（History）》有這樣的一段記載：「他們也告訴我，國王〔Sesostris，約公元前十四世紀〕把全埃及的土地均分，每位埃及子民領取得一份，需繳交若干稅款，…每當〔尼羅〕河流泛濫，某部份土地遭沖掉，…即量度剩下的土地以調整每人應付的稅款。據我猜測，幾何學即源於此，並且之後傳給希臘人。」的確，幾何（geometria）一詞的希臘字源，乃“geo（地）”及“metron（量度）”，正是這個意思。

通常大家把公元前三世紀成書的經典鉅著歐幾里得《原本》（Euclid's *Elements*）視為數學的原型與精神，奠下現代數學公理化及演繹處理方法的基礎。再經十九世紀的修補工程，譬如 1899 年德國數學家希爾伯特（David Hilbert, 1862-1943）的名著《幾何基礎（*Grundlagen der Geometrie*）》，成為今天的數學表述模範。這樣的敘述，雖然與實情相差不太遠，卻把事情過份簡化了。

有另外一種說法，認為《原本》的鋪陳、表述、甚至寫作動機，都與面積和體積的量度有關，也就是說，從開始歐氏幾何便立足於度量（metric）（S.D. Agashe, The axiomatic method: Its origin and purpose, *Journal of the Indian Council of Philosophical Research*, Vol.6, no.3 (1989), 109-118.）。《原本》卷二命題十四說：「作一個正方形等於已知直線形。」為什麼需要構作這樣的正方形呢？先看如何比較兩條線段，那是容易不過的事情，只用把其中一條放置於另一條上面，看看那一條能容下別一條。其實，那不正是卷一命題三要做的事嗎？那是必須倚靠公理一、二、三才能證明的。要比較兩個直線形（用今天慣用的數學名詞，叫做多邊形）卻沒有那麼容易了，除非那兩個直線形都是正方形。如果兩個直線形都是正方形，只用把其中一個放置於另一個上面，使左下角的直角重疊（這兒用上了公理四），看看那一個能容下別一個 (見圖 1)。

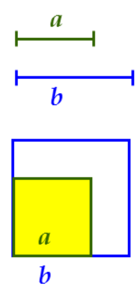

圖 1

因此，把一個直線形化為面積相等的正方形，是一個很有意思（亦很需要考慮）的問題。

　　要解決以上的問題，可以分兩部份進行，先把給定的直線形化為面積相等的矩形，再把矩形化為面積相等的正方形，那分別是卷一命題四十二、四十四、四十五和卷二命題五的內容。說仔細一些，第一部份是把給定的直線形分成三角形，再把每個三角形化為給定線段上的一個面積相等的矩形（更一般地，是有一個給定角的平行四邊形），然後把所有這些矩形疊起來 (見圖 2)。

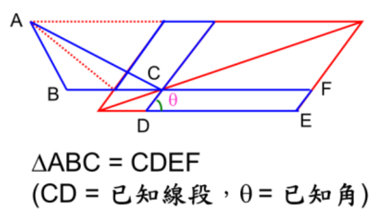

圖 2

要注意一點，證明這些命題，倚靠了那著名的公理五。第二部份需要用到《原本》卷二命題五，是把矩形化為面積相等的磬折形（gnomon）。由於磬折形是兩個正方形之差，倒過來看，如何把兩個正方形之和化為一個更大的正方形，是個關鍵，那不正是著名的「畢氏定理」（或稱「勾股定理」）的內容嗎　(見圖 3)？

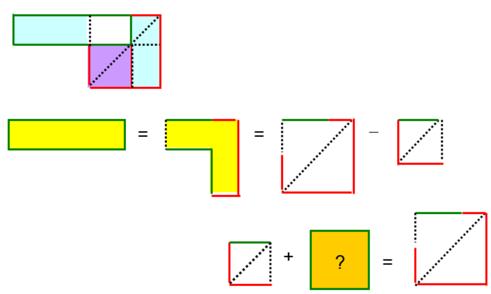

圖 3

從這個角度看，「畢氏定理」並非從天而降，而《原本》開首的鋪陳及公理的佈置也就井井有條了。最後，把卷一命題四十五、卷二命題五和卷一命題四十七（「畢氏定理」）合起來便得到卷二命題十四的證明 (見圖 4)。

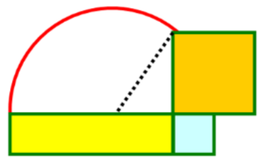

圖 4

曲線形面積又如何呢？《原本》亦有討論這方面的結果，最著名的是卷十二命題二：「兩圓面積之比等於它們直徑平方之比。」另一種表示方式是 $A = kd^2$，A 是圓的面積，d 是圓的直徑，k 是個常數。其實，常數 k 是 $\frac{1}{4}\pi$，π 乃熟悉的圓周率，或者說 $A = \pi r^2$，r 是圓的半徑，在總結時我們會回到這一點。

古代希臘人也懂得計算幾何形體的表面積，那是更複雜更困難的問題，而且在日常生活也不如圖形面積的計算那麼常見。最著名的例子大概是阿基米德（Archimedes， 公元前 287-212）的名著《論球和圓柱, I（*On the Sphere and Cylinder, I*）》的命題三十三：「任一球面等於它的大圓的四倍。」也就是說，$A = 4\pi R^2$，A 是圓球的表面積，R 是圓球半徑。

還有一個非常巧妙的計算，值得提及，即是希波克拉底（Hippocrates， 約公元前 460-308）化月牙形為方的證明。$ACBA$ 是個以 AB 為直徑的半圓，D 是中心，C 是半圓上的點，使 CD 垂直於 AB。$AECA$ 是以 AC 為直徑的半圓，F 是 AC 上的一點，$AECFA$ 叫做月牙形 (見圖 5)。

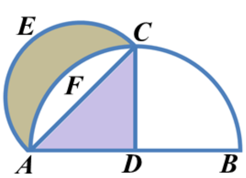

圖 5

由於半圓 $ACBA$ 與半圓 $AECA$ 之比等於 AB^2 與 AC^2 之比，也就是 2 與 1 之比，故半圓 $AECA$ 等於四份一圓 $AFCDA$。月牙形 $AECFA$ 是半圓 $AECA$ 減掉 $AFCA$，而三角形 ACD 是四份一圓 $AFCDA$ 減掉 $AFCA$，因此月牙形 $AECFA$ 的面積與三角形 ACD 的面積相同。

從以上片斷，我們已經看到面積和體積在幾何學的發展過程當中佔有重要席位。這個數學研討會，就是以面積和體積作主題，與各位數學老師交流教學經驗。

古代中國線性圖形的面積公式（鄧美愉）

圓面積公式 —— 阿基米德與劉徽（鄧廣義）

古代中國多面體的體積公式　（李駿宇）

球體體積公式 —— 阿基米德（吳家樂）

球體體積公式 —— 牟合方蓋（梁子傑）

總結（蕭文強）

幾位講者各自介紹了一些面積和體積的選題，當中引進了豐富的數學歷史素材。首先，讓我說明融會數學歷史素材於課堂教學的一個架構。就每一項選定的課題而言，有三方面的觀點需要考慮：數學史的觀點、數學觀點、教學觀點。作為數學教師，我們應該設法多些知道有關的數學史資料及具備堅實的數學知識，以瞭解該課題，然後著眼於教學方面，以冀能夠在課堂上發揮，讓學生學得更好，明白得更多更深入。

在引言部份我提到「畢氏定理」，不如就以此為例，從一本十八世紀幾何課本的敘述看看前述那三方面的關係。法國數學家克萊羅（Alexis Claude Clairaut，1713-1765）的著述《幾何原本（Elements de géométrie）》，出版於 1741 年，再版於 1753 年，當中對「畢氏定理」作了如下的敘述。命題十六教導讀者如何得到一個正方形，它的面積等於兩個相同（且較小）的正方形的面積之和，作者給出一個簡單而且顯明的圖形以解決問題 (見圖 6)。

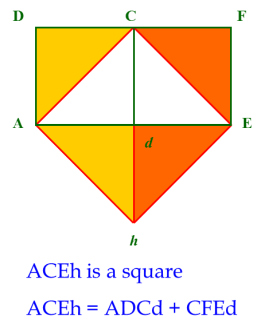

圖 6

接著，作者自然地提出一個更一般的問題，就是命題十七，如何得到一個正方形，它的面積等於另外兩個（不一定相同的）正方形的面積之和。通過圖形的指示，作者借用命題十六的思想解釋了如何做。（「延續命題十六的想法，我們試圖找到 DF 上的一個點 H：滿足（i）當 ADH，EFH 分別繞 A，E 旋轉到 Adh，Efh 時，它們交於點 h，（ii）AH，HE，Eh，hA 均相等而且互相垂直。取 DF 上的一個點 H，使$DH = CF = EF$。」）(見圖 7)

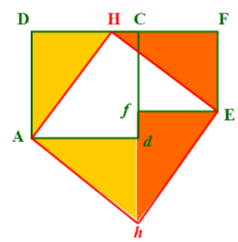

圖 7

從命題十七的構作來看，命題十八（「畢氏定理」）成為順手拈來的副產品！

在古代東方的數學也有類似的案例，譬如之前幾位講者論及的「出入相補原理」便是 (見圖 8)。

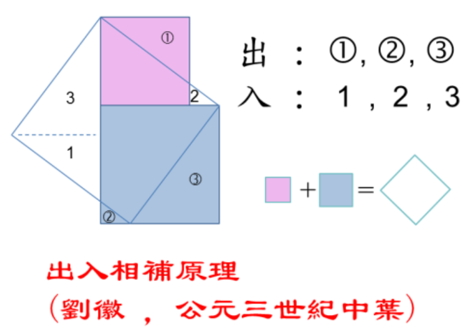

圖 8

比較一下古代東西方計算圓的面積的思想方式，對課堂教學甚有意思。我們已經見過阿基米德在公元前三世紀的著述《圓的量度（*Measurement of a Circle*）》如何證明圓的面積 A 等於勾和股分別是圓的半徑與周長的直角三角形的面積 K，運用的是窮竭法與雙重歸謬法，即是若 $A > K$，導致矛盾，但若 $A < K$，亦導致矛盾，故 $A = K$（等於圓的半徑乘圓周的一半）。固然，於邏輯推理而言，這個證明乃無懈可擊，但證明卻必須借助於一個已知的結果。如果我們以為 A 是圓的半徑乘圓周的三份一，證明便無法通過！要獲得那已知的結果，必須通過另外的聰明方法。反觀劉徽的「割圓術」（公元三世紀中葉），雖然不如阿基米德的演繹推理證明如許嚴謹，卻也言之成理，而且通過算法步驟得出正確答案。

劉徽注《九章算術》卷九時提及「出入相補原理」，注卷一時稱作「以盈補虛」，注卷五時又稱作「損廣補狹」，都是運用同一的思想和方法。利用這種思想，劉徽建立了面積理論和體積理論，在卷一作了矩形面積的定義：「凡廣從相乘謂之冪」，在卷五作了標準六面體體積的定義：「以廣袤相乘，以高乘之，得此積。」以矩形面積為起點，利用「出入相補原理」得到三角形的面積，再推廣至其他直線形的面積，還運用無窮小分割處理曲線形的面積，蘊含了微積分的精神。在三維的情況，中國古代數學家運用「出入相補原理」及「棊驗術」（立方、塹堵、陽馬），加上無窮小分割及「等高處截面積原理」處理眾多體積問題。後一個原理，在西方稱作卡瓦列里原理（Cavalieri’s Principle），是意大利數學家卡瓦列里（Bonaventura Cavalieri，1598-1647）在十七世紀提出來的，成為西方微積分的先驅。值得一提的，是劉徽提出來的「陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也。」這句話，相隔一千六百多年後與著名的希爾伯特第三問題（Hilbert’s Third Problem）的內容極有關連，古今成果唱和，成為數學史的佳話。

回頭重看《原本》卷十二命題二：「兩圓面積之比等於它們直徑平方之比。」古代希臘數學不用公式表達面積的計算，卻習慣上把這個重要的定理寫成如此形式，以今天的公式表達，即是 $A = kd^2$，A 是圓的面積，d 是直徑，k 是個常數。由於 $C = \pi d$，C 是圓周，π是圓周率，便得到 $A = \left(\frac{2k}{\pi}\right) Cr$，$r$ 是圓的半徑。我們也知道 $A = \frac{1}{2} Cr$ ，就是說 k 其實是 $\frac{1}{4}\pi$。$A = \frac{1}{2} Cr$ 這回事，在古代數學多處出現，較著名的是公元前三世紀阿基米德的《圓的量度（*Measurement of a Circle*）》，公元三世紀劉徽的《九章算術註》和公元十二世紀 Abraham bar Hiyya ha-Nasi 的《量度論（*Treatise on Mensuration*）》，各自給出精彩的解說 (見圖 9)。這條公式比較一般在中小學課本上見到的 $A = \pi r^2$ 有更豐富和更深刻的數學意義，因為它顯示了一個非常重要的結果，即是圓面積（二維情況）與周長（一維情況）有關。更一般地，有界閉域的面積與其周界上某一數量有聯繫，就是「微積分基本定理」（Fundamental Theorem of Calculus）的內容。

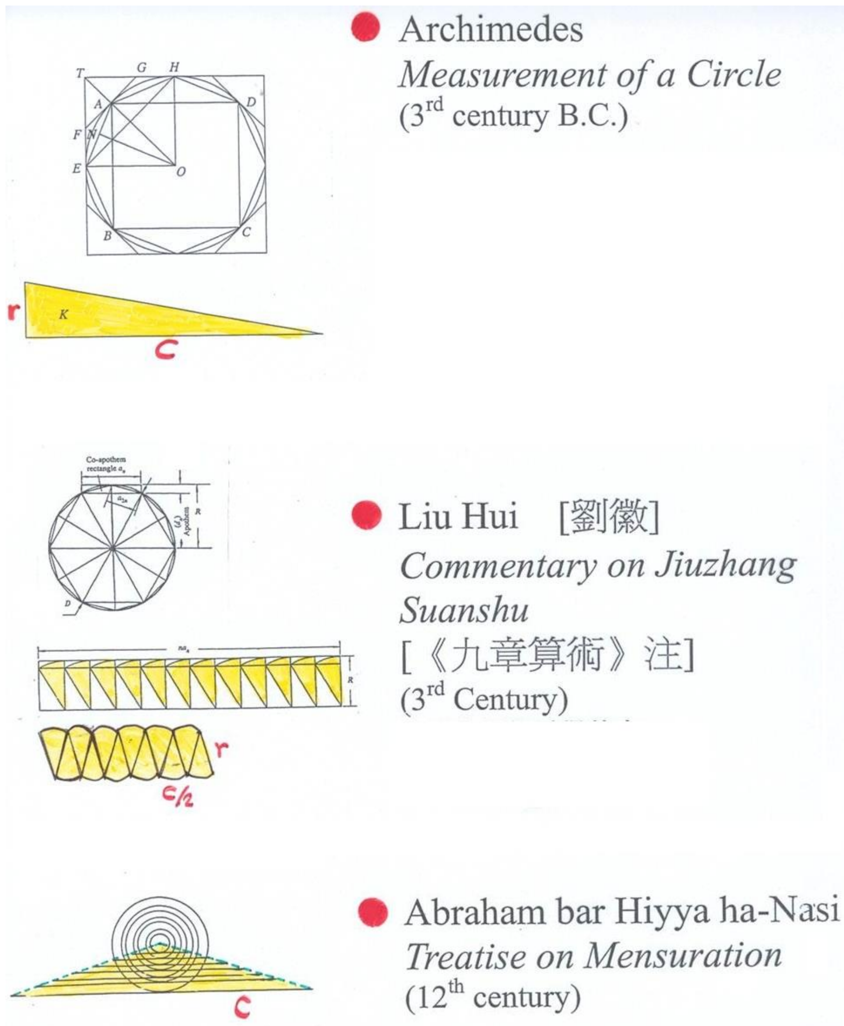

圖 9

看來，面積和體積的概念毫不簡單，雖然自小學以來，面積和體積已經是課堂上討論的課題。面積和體積的概念在歷史上也是由來已久，基本思想就是一個可加的量度，而且在剛體運動底下是不變更的。然而，這個基本概念卻有待四千多年以降一代又一代數學家的努力，才於二十世紀初把它提煉成精確且易於運用的形式。勒貝格（Henri Lesbesque, 1875-1941）在他的 1902 年博士論文《積分、長度、面積（Intégrale, longueur, aire）》奠下面積理論的基礎，其後由卡拉西奧多里（Constantin Carathéodory, 1873-1950）在其著述《實函數論教程（Vorlesungen Über Reele Funktionen ， 第二版，1927）》作出闡明。

在 1982 年和 1983 年我分別給了兩個普及數學講座，與面積和體積有關，一個題為「微積分的故事」，另一個題為「不用微積分能計算體積嗎？」，文本刊載於其後出版的一本書的第二章及第三章（蕭文強，《1，2，3，…以外》，1990

年初版；1993，1994 年（修訂版））。主要思想是從面積和體積的直觀概念提煉它的精髓，捕捉其要義，得到如下對面積的定義（類似地可作體積的定義）。

每個（可測度）圖形 S 有一個相應的數 $m(S)$, 滿足以下的屬性：
[A1] $m(S)$是非負數。
[A2] 若 S_1 和 S_2 不重疊地組成 S，則 $m(S_1)+m(S_1)=m(S)$。
[A3] 若 S' 是 S 的平移，則 $m(S)=m(S')$。
[A4] 若 S 是單位正方形，則 $m(S)=1$。

漂亮的事情是：對每個（可測度）圖形 S，有辦法賦予滿足 [A1] 至 [A4] 的 $m(S)$，而且得到的 $m(S)$ 是唯一決定了。[A4] 只為求標準化而已，取得一個基準以資比較。至於 [A2] 和 [A3] 的作用，在「出入相補原理」中我們已經多次領教過了。反而毫不起眼的 [A1] 卻起關鍵作用，運用它即是運用了微積分！（欲知詳情，有興趣的讀者可以參考《1，2，3，…以外》和另外兩本英文著作：A. Beck, M.N. Bleicher, D.W. Crowe, *Excursions Into Mathematics*, 1978, Chapter3; V.G. Boltianskii, *Hilbert's Third Problem*, 1978, Chapter 1.）

如果你仍然認為面積和體積乃簡單不過的概念，讓我再提出兩個有關的問題。第一個在課堂上可能是耳熟能詳，甚至有些人以為理所當然，第二個引領我們至高等數學的範疇。

《原本》卷六命題十九說：「兩相似三角形面積之比等於相應的邊平方之比。」命題二十把結果推廣至相似多邊形的情況，由此（加上極限思想）可以再推廣至任意相似圖形的情況。容許我在這兒賣個關子，不展示《原本》的解釋，那是頗為巧妙的。大家可能想到，上面的結果涉及相應邊的平方，與面積是二維的概念有關，如果是相似物體的體積，是三維的概念，便涉及相應邊的立方了。但大家有沒有想過，維數（dimension）是什麼？對維數的討論，可追溯至二十世紀初數學家對何謂幾何圖形（geometric figure）的探討，或者舉一個更具體的特例，何謂曲線（curve）？何謂曲面（surface）？在二十世紀的二十年代蘇聯數學家葉戈洛夫（Dimitri Fedorovich Egorov, 1869-1931）把這個題目交給他的博士生，年青的烏雷松（Pavel Samullovich Urysohn, 1898-1924），後者花了整個夏天專攻這個難題。根據烏雷松的好友兼同窗亞歷山德羅夫（Pavel Sergeevich Aleksandrov, 1896-1982）後來敘述：「1921 年的整個夏季，P.S. [烏雷松]都在設法尋找一個“最新”的維數定義；他把注意力從一個想法轉移至另一個，時常設法構作例子以說明為何這個想法應該取代那個想法。…終於，將近八月尾的一個早上，P.S. 醒來時頓悟了他創建的「歸納維數（inductive dimension）」的完滿形式。」在二十世紀前期，在眾多頗

富盛名的數學家的共同努力下，維數理論取得長足的進展。我們在中學（甚至大學）的數學課程裏對維數的理解是確定物體中某一點所需要的獨立參數（座標）的數目，但在維數理論的發展過程中，出現了好幾種對維數的定義，甚至有些維數並不是整數。那是十分有趣的一段故事，從瑞典數學家科克（Helge von Koch, 1870-1924）和波蘭數學家謝爾品斯基（Wacław Sierpiński, 1882-1969）發現的奇怪“曲線”和“曲面”引領數學家對分形（fractal）的研究，在這兒就不贅了。

以上我們經常提到數學歷史素材，幾位講者亦運用了不少《九章算術》或《原本》書中的事例以增進對數學內容的理解，那都是數學歷史學習小組共同研讀這兩本經典名著的一些心得。讓我以下面一首打油詩作結，以誌小組在學習過程當中獲致的樂趣及其間的心路歷程：

「言必《原本》非崇洋，
心懷《九章》亦平常，
中西卷帙相輝映，
異曲同工意深長。」