蕭文強,《1,2,3,…以外》,廣東教育出版社(1990);修訂本,香港三聯書局(1993);臺北書林(1994).

第二章　微積分的故事

(1982年3月、6月——香港科學館科普講座)

在第一章裏提到的不少題材，其實踏進了數學分析的範圍，而數學分析可以説是微積分的延伸。讀者對微積分這個名字，大抵不會覺得陌生，因為有些中學課程包括了它，沒真正學過也會聽過吧？雖然微積分的基本思想早已孕育於古代東西方數學家的先驅工作中，作為一門具備體系的學科，它卻只有三百多年的歷史。這一章並非要敍述微積分在過去三百多年的發展，只着眼於它的誕生過程吧。

1. 微積分的名稱

微積分的英文詞calculus源自拉丁文，原意是石子，意指計算，因為古代歐洲人用石子來幫助計算。(現在醫學上還用這個字來代表石子的，英文詞"a calculous man"並非指一位精通微積分的人，而是指一位患腎結石的病人！)從某方面看，這個名詞是恰當的，在它的發展初期，微積分的確是一件數學計算的利器；但從另一方面看，它也引起誤解，使人以為微積分就是機械化計算而已。事實上，這門學科遠遠超乎機械化計算，它不只是數學史上，甚至是人類思想史上的一頁輝煌成就，對後世的科學、技術、哲學思想都有影

響。

時至今天，微積分已經是眾多學科領域裏不可缺少的一件數學工具，還不僅是在物理科學、材料科學、工程科學這些學科，甚至在生物科學、社會科學以至企業管理上，它也大顯身手。在它的發展初期，它已經奪得兩項重大的勝利，雖然讀者對這兩項成就多已耳熟能詳，再提一下也是值得的。第一項是在十七世紀中葉牛頓(Newton)利用他剛建立起來的微積分去闡述他的力學體系，解釋了天體運行的規律，為後世科學家對大自然規律的探索打開一個新局面。難怪十八世紀英國詩人蒲柏(Pope)這樣讚頌牛頓："大自然與其規律躲在黑暗的夜裏。上帝詔曰：'讓牛頓來吧！'光明隨即降臨。"(Nature and nature's laws lay hid in night; God said, 'Let Newton be', and all was light。)第二項是在十九世紀中葉麥克斯韋(Maxwell)把當時所知的電磁現象通過數學處理總結為著名的麥克斯韋微分方程，從而在數學理論上推斷有電磁波的存在，促使科學家在實驗室裏尋找它。隔了二十多年後，赫茲(Hertz)終於找着了電磁波，再過十三年後，馬可尼(Marconi)利用它實現了無綫電通訊的夢想。

"微積分"這個中文詞，最早見諸清代數學家李善蘭和英國人偉烈亞力(Wylie)在1859年合譯的《代微積拾級》(英文原本是美國數學家羅密士(Loomis)在1850年著的《解析幾何與微積分》)。李善蘭在譯序中説："是書，先代數(這裏指的其實是解析幾何，當時稱代數幾何)，次微分，次積分，由易而難，若階級之漸升。譯既竣，即名之曰代微積拾級(這裏是取拾級而登的意思)。"他又説："我朝康熙時，西國

來本之奈端(今譯作萊布尼茲和牛頓)二家又創微分積分二術……其理大要，凡綫面體皆設由小漸大。一刹那中所增之積即微分也，其全積即積分也。”這就是我國微積分名稱的由來。

2. 古代希臘數學的體積計算

在幾千年前的東西方古代數學文獻裏，已經出現不少關於面積體積的計算，但直至公元前四世紀和三世紀，古希臘數學家才給這些公式加以證明，其中最卓越的貢獻來自公元前三世紀的阿基米德(Archimedes)。他的演繹推理，即使以今天的尺度量度，也稱得上嚴謹，但更叫人佩服的，是他靈活運用直覺想像、類比推測，甚至借助其它學科去發現很多深刻的定理。

阿基米德是用一種叫做窮竭法的辦法證明他的公式，這辦法是基於一個公元前四世紀希臘數學家歐多克斯(Eudoxus)提出的原理：如果從一個數量減去至少一半，再從剩下的數量又減去至少一半，這樣做下去，經過足夠多次後，剩下來的數量可以任意地小。為了簡單地表達窮竭法的中心思想，讓我們看一個較簡單的定理，那不是阿基米德發現的公式，卻也相當有名，是歐幾里德(Euclid)著的《原本》裏卷十二的第二條定理：兩圓面積之比等於它們直徑平方之比。用現代數學語言，就是説兩圓的面積 a 和 A，與它們的直徑 d 和 D 滿足等式 $a/A = d^2/D^2$(圖 2.1)，這其實相當於給出圓的面積公式了。《原本》裏的證明是這樣的，假設等式不成

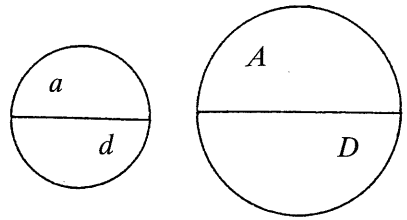


圖 2.1

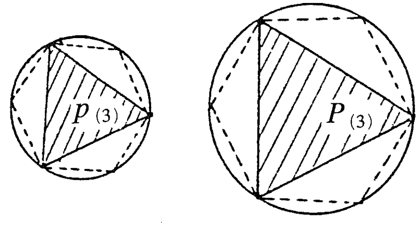


圖 2.2

立，便有一邊比另一邊大，我們將要證明兩種情況也導致謬誤，所以等式一定成立。由於兩種情況的推理完全相似，我們只用考慮其中一個，不妨假定 a/A 大於 d^2/D^2。先選一個小於 a 的 a_1，使 $a_1/A = d^2/D^2$，把 $a-a_1$ 叫做 e。考慮每個圓的內接正 N 邊形(譬如從 $N=3$ 開始)，每次把邊的數目加倍得出內接正 $2N$ 邊形(圖 2.2)。當內接正多邊形有 N 條邊時，它們的面積分別是 $p(N)$ 和 $P(N)$，已知 $p(N)/P(N) = d^2/D^2$ (這是一個較易證明的幾何結果，讀者不妨試試)，所以 $p(N)/P(N) = a_1/A$。從 N 邊形擴大至 $2N$ 邊形的過程中，圓與內接正多邊形的面積的差別減去至少一半(為什麼？)，按照歐多克斯原理，經過足夠多次後，$a-p(N)$ 便小於 $e=a-a_1$

了，即是說$p(N)$大於a_1，所以$P(N)$大於A，但內接正N邊形是在圓裏面，它的面積怎能大於圓的面積呢？這就是謬誤了。

其實，歐多克斯原理已經蘊含後世微積分的無窮小和極限這兩個概念，只是它巧妙地以有窮的形式作描述吧。這樣做雖然嚴謹，卻掩蓋了無窮這個關鍵的本質。微積分不能在更早時候誕生，其中一個原因，就是古代數學家這種迴避無窮的心態。不過，二千多年前的人有這麼嚴密的推理，不能不叫人佩服。阿基米德就是用這種辦法證明了許多面積體積的公式，但有一點使人大惑不解的，就是運用這種辦法要事前曉得公式是什麼或者應該證明什麼，若事前不知道這個，便無所施其技了。那麼，難道阿基米德是未卜先知的神仙嗎？這個謎直到1906年才揭曉，那一年有位專門研究古希臘數學的德國學者海堡(Heiberg)在君士坦丁堡(即今土耳其境內的伊斯坦布爾)一所寺院裏找到一張羊皮紙，上面是十三世紀時手抄的經文，但經文下面卻隱約可見別的字迹。原來底下是十世紀手抄的另一份文獻，收藏至十三世紀時，僧侶認為沒用便把它洗去，用那羊皮紙抄別的經文。海堡是一位非常細心勤懇的學者，他花了很多工夫仔細審閱那被洗去的文字，果真皇天不負有心人，那竟是阿基米德失傳之作，是他寫給另一位數學家厄拉多塞(Eratosthenes)的信，解釋他怎樣發現面積體積公式的方法，所以後來人們把這份珍貴文獻叫做《方法》。原來阿基米德把圖形(物體)掛在一個假想天平的一端，他把圖形(物體)看成是由綫(面)組成，把每條綫(每塊面)從天平的一端移到另一端，巧妙地掛在適當的地

方，使兩邊平衡，然後利用力矩原理，計算原來圖形(物體)的面積(體積)。舉一個例子，想像把一個半徑是R的圓球，它的外接圓柱(底圓半徑是R，高是$2R$)和一個底圓半徑是$2R$高是2R的圓錐掛在天平的一端，天平的支點是O(見圖2.3)。在距離x那麼遠的地方取一塊很薄的截面，假

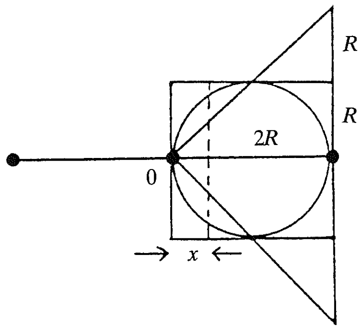


圖2.3

定它的厚度L是很小時，不妨認為從圓球獲得的截面的體積是$\pi x(2R-x)L$、從圓柱獲得的截面的體積是πR^2L、從圓錐獲得的截面的體積是πx^2L(為什麼？)。把從圓球和圓錐獲得的截面移到天平的另一端，掛在距O是$2R$的地方，由力學的考慮可知這一端的力矩是$2R[\pi x(2R-x)L+\pi x^2L]$，化簡了是$x[\pi(2R)^2L]$。所以，如果把掛在原來一端的圓柱截面擴闊一倍，便兩者平衡了。這樣把截面逐塊移過去，最後得到這樣的平衡狀態，一端是圓球S和圓錐N，另一端是擴闊了一倍的圓柱D(圖2.4)。既然兩端力矩相等，便成立等式$2R$〔S的體積$+N$的體積〕$=R$〔D的體積〕，但N的體積是D的體積的三分一，所以S的體積是D的體

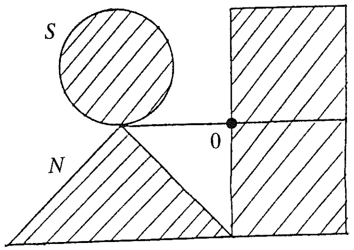


圖 2.4

積的六分一。由於原來的外接圓柱體積是D的體積的四分一，所以圓球體積是它的外接圓柱體積的三分二。阿基米德還發現圓球的表面積也是外接圓柱表面積（連面和底）的三分二，他非常欣賞這一條定理，甚至吩咐親人，在他死後，把這個圖形刻在他的墓碑上（圖 2.5）。阿基米德之死，是人類文化史上一個極富寓意的悲劇。相傳羅馬大將馬塞流斯(Marcellus)攻陷敍拉古（在今意大利南部，當時阿基米德居住的城市），士兵衝入一所房子，看見一位老人正在沙盆上畫圖沉思，士兵弄糟了圖，老人怒曰："不要弄糟我的圖！"激起士兵的兇性，手起刀落殺死了老人，這老人就是阿基米德。另一說馬塞流斯久慕阿基米德的才華，着士兵找他帶來見面，士兵找着阿基米德時，他正在思考幾何難題，不解決不罷休，不肯馬上隨士兵走，士兵怒火頓起，手起刀落殺死了他。二千多年過去了，大家還記得阿基米德，但多少人記得那位征服者馬塞流斯呢？這個故事還有一節尾聲，據云馬塞流斯事後十分懊悔，吩咐把阿基米德厚葬，為它立碑，碑上刻上他生前心愛的圓球圓柱圖形。隨着時日消逝，後人已經不知道阿基米德之墓落在何方，直到 1965 年在敍拉古一

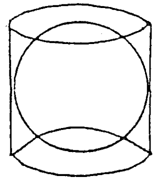


圖 2.5

處將興建酒店的工地，挖地基時掘出了一塊墓碑，上面刻了一個圓柱盛着一個圓球，阿基米德之墓才重現人間。

3．中國古代數學的體積計算

說了一個西方的故事，應該輪到說一個東方的故事了。我國最早一部有完整體系的數學著述叫做《九章算術》，記載了至秦漢為止的數學成就。書裏有不少面積體積公式，但都沒有證明。三國時劉徽為《九章算術》作注，補充了很多解釋。《九章算術》的第五章叫做"商功"，是關於工程的計算，主要是計算體積，其中一題是求"陽馬"的體積。"陽馬"是當時的建築名詞，指方錐體（圖 2.6(a)）。劉徽注："斜解立方

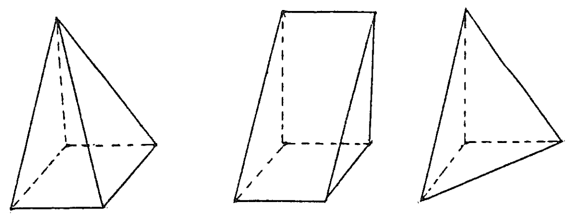

(a)　(b)　(c)

圖 2.6

得兩塹堵。斜解塹堵，其一為陽馬，一為鱉臑。陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也。”“塹堵”是護城河的牆，指三棱柱體(圖2.6(b))。“鱉臑”是龜的臂骨，指某種特殊的四面體(圖2.6(c))。這段話的意思，就是說陽馬體積是鱉臑體積的兩倍，而兩個陽馬和兩個鱉臑合成一個立方(圖2.7)，所以鱉臑體積是立方體積的六分一，陽馬體積是立方體積的三分一，也就是底面積乘高的三分一，這是正確的公式。

過了一千六百多年後，德國數學家希爾伯特(Hilbert)提出一個著名的問題：能否把一個多面體剖成若干碎塊，拼湊成另一個體積相同的多面體(見第三章)？答案是不一定可能，它的數學意義是深遠的，粗略地說，它說明了計算多面體體積，必須倚靠微積分。那麼，劉徽計算方錐體的體積，有沒有用了微積分？有的，但這一點只隱約出現於字裏行間，就連他本人也摸不透這回事。以當時的數學水平來說，他是不容易理解這麼的一回事，能點出這個想法，已屬難能可貴了。在“陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也”後面是一大段注解，大意是這樣：把陽馬分成兩個小陽馬和四個塹堵，

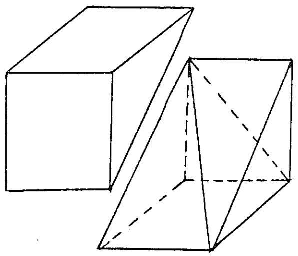


圖2.7

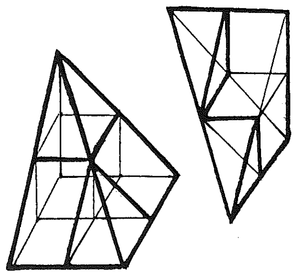
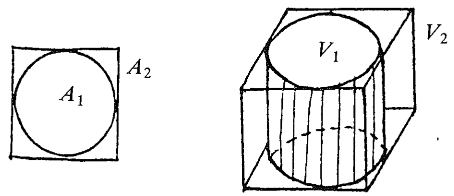


圖2.8

把鱉臑也分成兩個小鱉臑和兩個塹堵(圖2.8)。除卻小陽馬和小鱉臑不計，一個體積是另一個的兩倍。把每個小陽馬照樣分成兩個更小的陽馬和四個塹堵，把每個小鱉臑照樣分成兩個更小的鱉臑和兩個塹堵。除卻更小的陽馬和更小的鱉臑不計，一個體積又是另一個的兩倍。這樣做下去，劉徽說：“半之彌少，其餘彌細，至細曰微，微則無形。由是言之，安取餘哉。”就是說那些“巉岩”部分越變越小，小至可以置諸不理，於是一個體積真的是另一個的兩倍。以今天的無窮小概念來說，“微則無形”(結果等於零)是不妥當的，但不容否認，劉徽已經捕捉了無窮小的基本精神。

在上一節我們看到阿基米德把面(體)看成由綫(面)組成，也含有無窮小的想法。這種想法，劉徽也經常運用，說得明確一些，他是使用以下的原理：如果兩個物體(圖形)在等高的截面面積(截綫長度)有一個固定的比率，這兩個物體(圖形)的體積(面積)也有這個比率。最有趣的例子是他注第四章“少廣”時指出原書的錯誤，原書說圓球體積和它的外接立方體積的比率是$\pi^2:4^2$(原書取三作π的值，所以比率是9:16，以下一律寫作π)。古人知道圓面積與外接正方形面積之比是$\pi:4$，所以圓柱體積與外接立方體體積之比也是$\pi:4$(圖2.9)，但他們錯誤地認為圓球體積與外接圓柱體體積之比也是$\pi:4$，所以才得到上面的結論。劉徽指出$\pi:4$並不是圓球體積與外接圓柱體體積的比率，而是圓球體積與另一個物體體積的比率。他把這個物體叫做“牟合方蓋”，想像圓球由一叠圓組成，由小至大(從“北極”點至中間的大圓)，又由大至小(從中間的大圓至“南極”點)，每個圓有它的外接



$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi}{4}$$

圖 2.9

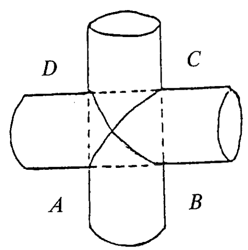


圖 2.10

正方形，也是由小至大，又由大至小，這叠正方形構成的物體就是牟合方蓋。你也可以把牟合方蓋看成是兩支大小一樣互相垂直相插的圓柱體的公共部分(圖 2.10)。要計算圓球體積，只用計算牟合方蓋的體積。劉徽嘗試過，沒能成功，但他留下一段很有意思的話："觀立方之內，合蓋之外，雖衰殺有漸，而多少不掩。判合總結，方圓相纏，濃纖詭互，不可等正。欲陋形措意，懼失正理，敢不闕疑，以俟能言者。"他把研究心得寫下來，但坦白承認自己做不到，也不願誇誇其談或含糊其詞，這是何等踏實的作風和謙虛的襟懷！過了二百五十年後，南北朝數學家祖冲之、祖暅父子以

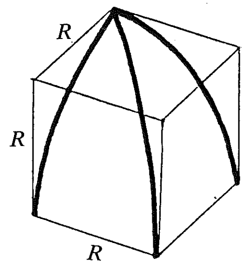


圖 2.11

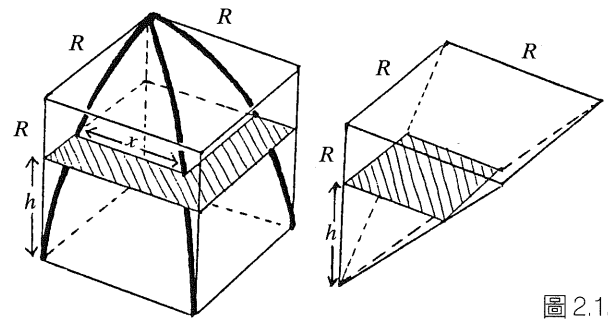


圖 2.12

巧妙的手法解答了這個懸疑。他們的計算是這樣子的：考慮八等分一個牟合方蓋，把它嵌在一個邊長是R(圓球的半徑)的立方裏(圖 2.11)，巧妙之處在於把計算移到"立方之內，合蓋之外"去，即是計算$L=$(立方)$-\frac{1}{8}$(牟合方蓋)的體積。注意一點，如果在距底部高h的地方作一截面，它在L截出來的曲尺形面積是$R^2-x^2=h^2$(用勾股定理)。取一個邊長是R的正方底高是R的方錐，倒置放在旁邊，那麼，在距底部高h的地方作一截面，它在方錐截出來的方形面積也是h^2(圖 2.12)，所以L的體積與方錐的體積相同，這是

因為“夫疊棊成立積，緣冪勢既同，則積不容異。”“冪”即截面面積，“勢”即高度，全句意思是說如果兩個物體在等高的截面面積一樣，則體積也一樣(見圖2.13)。三個這樣的方錐合起來是一個邊長是R的立方體(試試看)，所以方錐體體積公式是$\frac{1}{3}R^2$，所以L的體積也是$\frac{1}{3}R^2$，因而牟合方蓋的體積是$\frac{2}{3}D^3$。根據劉徽的推理，圓球體積是$(\pi/4)\times(\frac{2}{3}D^3)=\frac{1}{6}\pi D^3$了。可惜祖氏父子的著述《綴術》早在北宋時代已失傳，我們知的不多，以上的敍述，是按照唐代李淳風注《九章算術》而寫下來的。“緣冪勢既同，則積不容異”這句話，在西方叫做卡瓦列利(Cavalieri)原理，意大利數學家

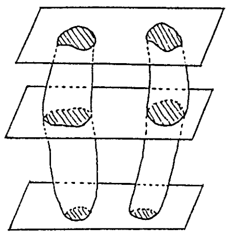


圖2.13

卡瓦列利在他的1635年著述裏提出這個結果，利用它計算面積體積。其實，即使在西方，這種辦法在卡瓦列利之前已廣泛地應用到，例如德國數學家天文學家刻卜勒(Kepler)在十七世紀初便是這樣求橢圓的面積。他把半長軸是a、半短軸是b的橢圓包在半徑是a的圓裏面(圖2.14)，從橢圓特性他知道橢圓內的綫長$A'B'$和圓內的綫長AB的比率是$b:a$。圓內的綫組成圓，面積是πa^2；橢圓內的綫組成橢圓，面積是圓的面積乘上b/a，所以是πab。

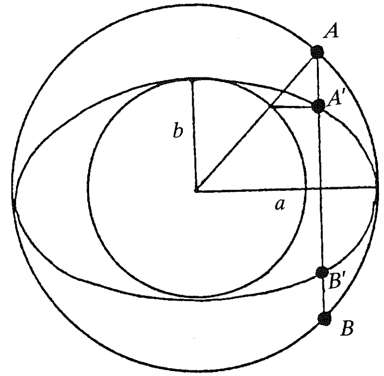


圖2.14

4. 西歐數學的興起

為什麼刻卜勒對橢圓面積這麼感興趣呢？比刻卜勒早了二千年的希臘數學家已經發現橢圓曲綫，但直到刻卜勒之前，那只不過是幾何學研究的一種曲綫吧，是刻卜勒把它帶進了實際世界！刻卜勒為了探討星空的奧秘，特地跑到當時最富盛名的天文學家第谷(Tycho Brahe)那兒當一名助手。過了兩年，第谷忽然去世，刻卜勒便接替了他的職位，並且承繼了當時全歐洲最詳盡最豐富的天文數據資料。刻卜勒苦心孤詣，立志要從這大量的數據中尋求天體運行的規律。他作了不下百次構想，但每一次只要由構想推斷得到的計算結果和第谷的觀測數據相差少許，他便放棄構想重頭再來。關鍵的一次不過相差八分而已，這是科學家尊重客觀事實的高度表現。終於在1609年他發表了兩條著名的定律：(1)行星

繞日運行的軌道是個橢圓，以日為一焦點。(2)行星繞日運行時，從日至行星的綫段在相等的時間內掃過相等的面積。再過了十年後，他發表了第三條定律：(3)行星繞日運行一周的周期之平方與橢圓軌道的半長軸之立方成正比。這理論是1543年波蘭天文學家哥白尼(Copernicus)的日心說的深化結果，雖然哥白尼提出行星繞日運行這個學說，在當時來說可謂石破天驚，但他仍舊擺脫不了傳統古希臘學說的影響，認為行星循圓形軌道以均勻速度運行。刻卜勒的發現，不只顯示了有需要研究非均勻速度和圓以外的曲綫，它還直接促成了微積分的發展，牛頓就是為了要進一步解釋刻卜勒三大定律才建立起他的力學體系，而在這個過程中奠下了微積分的基礎。

與刻卜勒同時期的意大利數學家和物理學家伽利略(Galileo Galilei)在促成微積分的發展中也扮演了一個重要的角色。根本上，他開展了科學數學化的方向。他認為必須從大自然錯綜複雜的現象中抓緊物質和運動這兩個基本概念來研究。科學研究是從觀察實際世界得出基本原理，然後按照數學研究的辦法，從這些基本原理出發，演繹推理得出新的結果，再從實驗中驗證這些新結果是否正確。為了尋求定量的描述，數學便成為科學研究中不可或缺的拍檔。伽利略在1610年說了一句有名的話："大自然的奧秘都寫在這部永遠展開在我們面前的偉大書本上，如果我們不先學會它所用的語言，就不能了解它……這部書是用數學的語言寫的。"正是這種信念，為後世科學研究指出新的路向。

整個十七世紀初葉的西歐，便是充滿這樣一種對大自然

熱切求知的生氣，這是自十五世紀開始的文藝復興運動的必然的延續發展。它拓廣了人們的視野，激發了人們的思想。同時，當時的社會發展，帶來工商業的發達，連帶引起一連串的變化，也帶來新的科研問題亟待解決。特別地，這類問題涉及變動的數量，是傳統的"靜"的數學沒考慮過的，已有的數學知識顯得不敷應用了。很自然地，當時的第一流數學家的努力，差不多都集中在那一方面。

5. 微分和積分

讓我們先看一個重要的概念，叫做變化率。為了方便敍述，暫時假定我們考慮的是所走距離對時間來說的變化率，也就是通常所謂速度。首先，必須區別清楚兩種速度，就是平均速度和瞬時速度。平均速度是個十分簡單的概念，把在某段時間內所走的距離，用所需的時間除它便是。但使人感興趣的往往是瞬時速度，例如從槍管射出來的子彈擊中人的時候，平均速度是多少說明不了什麼，但擊中人的一剎那的瞬時速度卻不可不知！怎樣理解這個瞬時速度呢？設子彈在前進中，從某瞬時T秒起計，在$T+0.5$秒它走了$207.5m$，平均速度是每秒$415m$。把觀察時間縮短一點，在$T+0.1$秒它只走了$41.9m$，平均速度是每秒$419m$。再把觀察時間縮短一點，在$T+0.01$秒它只走了$4.199m$，平均速度是每秒$419.9m$。這樣地觀察時間越縮越短，得到的平均速度是越來越接近某個數量，有理由把這個數量叫做子彈在T秒的瞬時速度。或者你會說："既是瞬時，何來速度？時間既不

變，位置當然也不變，何來什麼平均速度呢？”這種爭辯，古已有之。在公元前五世紀希臘哲學家已經提出過，後來在十八世紀上半期也有人提出過。我不想把討論糾纏在這個問題上，不如相信大自然吧，任何人試過走路不小心碰上障礙物弄得鼻青臉腫的話，一定不否認有瞬時速度這回事的！

伽利略發現了一條這樣的定律：物體由靜止狀態自由下落，下落距離和所需時間的平方成正比。凡是一個數量隨着另一個數量變更而變更的話，數學上便把這種變更的關係寫作一個叫做函數的東西。在這裏以S代表下落距離，以T代表下落時間，我們說S是T的函數。如果以m量度S，以秒量度T，伽利略的定律可以定量地表為$S=5T^2$(5是約數，本應是4.9…)。我們問5秒後物體的瞬時速度是什麼？(5秒後的平均速度是每秒25m，因為在5秒內物體下落了125 m。)我們可以這樣考慮，5秒後S是125，$5+h$秒後S是$5(5+h)^2=125+50h+5h^2$，所以在這h秒內物體實際下落了$k=50h+5h^2$，平均速度是每秒$k/h=50+5h$。如果h越縮越小，平均速度便越來越接近每秒50m。按照剛才對瞬時速度的理解，5秒之後物體的瞬時速度是每秒50m。要注意一點，這個答案，好象只要在k/h的式中置$h=0$便得到，但其實在思路方面卻是截然兩回事。如果真的置$h=0$，那麼也會有$k=0$，k/h便變成沒有意思了。

以上的解釋，其實就是微分法的基本思想。更普遍的情形，是不局限於速度，即是考慮y是x的函數，y隨x變更而變更，對x來說y的瞬時變化率叫做y的導函數，如何求這個導函數的方法便叫做微分法。舉一個例子，y代表氣壓，x

代表高度，氣壓隨高度變更，它的導函數表示氣壓對高度來說的瞬時變化率；這裏的“瞬時”用詞可能不太貼切，應是“瞬高”才對，因為在每個高度的氣壓變化率也不同，我們計算的是在每一個高度的氣壓變化率。通常的符號，是把這個導函數記作dy/dx。用幾何語言來敍述，我們用一條曲綫表示y和x的關係，曲綫上一點A的橫坐標表示x的值，縱坐標表示相應的y的值。隨着x變更，點便在曲綫上走動(圖2.15)。從點(x, y)到點$(x+h, y+k)$的平均變化率是割綫AB的斜度k/h，當h越縮越小時，這條割綫越來越接近在點(x, y)的切綫(假定它存在)，所以瞬時變化率就是在這點上的切綫的斜度(圖2.15)。在十七世紀初，切綫斜度的研究是

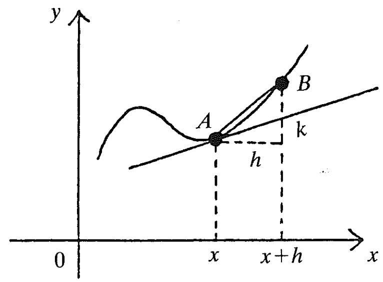
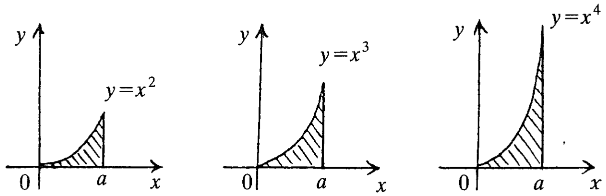


圖2.15

一個重要的題目，法國數學家費爾馬(Fermat)在1630年左右提出一個有系統的解法，基本上有如我們在上面解釋過求瞬時速度的辦法。費爾馬計算了$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^4$等曲綫在橫坐標是a那一點上的切綫斜度，發現答案分別是$2a$，$3a^2$，$4a^3$等等(圖2.16)。費爾馬也繼承前人對計算面積的興趣，但他在前人基礎上又邁進一步，他先計算由很多



切線斜度	$2a$	$3a^2$	$4a^3$
面積	$\frac{a^3}{3}$	$\frac{a^4}{4}$	$\frac{a^5}{5}$

圖 2.16

很多很窄很窄的在曲綫底下的長方條組成的梯級形面積，這是曲綫底下面積的一個近似值(圖 2.17)。就如同理解瞬時變化率一樣，考慮這些長方條越變越窄但也越變越多，這個近似值便越來越接近某個數量，有理由把這個數量稱為真正的面積。用這種想法，費爾馬也計算了$y=x^2$，$y=x^3$，$y=x^4$等曲綫底下由原點至橫坐標是a那一點的面積，發現答案分別是$a^3/3$，$a^4/4$，$a^5/5$等等(圖 2.16)。他的方法已經包含積分法的基本思想，至此微積分的兩種基本方法都具備了。

讀者可以看到，微分法是個無窮的相減操作，積分法是個無窮的相加操作。再看費爾馬的特例，很難相信以他那種敏鋭的頭腦沒注意到微分法和積分法之間的關係。不過在所有已知的文獻上，都不見他提過這回事，最先意識到微分法和積分法的關係的人，似乎是牛頓在劍橋大學唸書時的老師巴魯(Barrow)。牛頓和萊布尼茲(Leibniz)後來更清晰地指出了微分法和積分法的關係，就是今天叫做微積分基本定理的這個結果。以極其粗疏的敍述，這定理説：把一個函數先

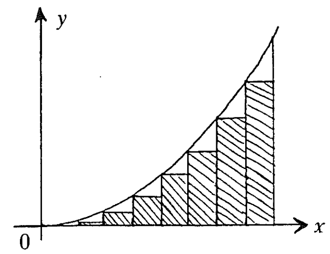


圖 2.17

求積分，再求微分，便得回原來的函數。用正確的數學語言説，其中一個版本是這樣：若f是閉區間〔a，b〕上的連續函數，而$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，則f是F的導函數(沒學過微積分的讀者，可不必理會這個)。這個定理解釋了為什麼某些積分問題可以化為機械化計算，初學微積分的人已經懂得這個辦法，就是先計算不定積分(不定積分也稱原函數，就是一個經微分法得到原來函數的東西，例如$y=x^2/2$是$y=x$的一個不定積分)，有很多公式教人怎樣計算不定積分，然後把上限和下限代入，兩者相減就是答案，例如$\int_a^b xdx$是$b^2/2-a^2/2$。但如果你把這個辦法叫做求積分，便是誤解了積分的要義。應該把積分看成是某個級數和的極限值，求積分就是計算這個極限值，利用不定積分只是一個手段而已。我們曉得這個手段，全憑知道微積分基本定理成立，但其實除了一些簡單情況(或者教科書上的習作)外，這個辦法通常行不通，在十九世紀上半期，甚至有人證明了對某些函數這個辦法一定行不通！把積分看成是某個級數和的極限值，才使它的應用廣泛起來，而不只局限於計算面積，就如同把微分法看成是計算一般函數的變化率，才不只局限於計算運動的速度。

6. 牛頓和萊布尼茲的工作

提起微積分，我們一定想起牛頓和萊布尼茲，通常書本上都説是他們兩位發明微積分的。牛頓是英國人，萊布尼茲是德國人，都是十七世紀的卓越博學之士。兩人各自在差不多同時期建立起微積分的體系，正因如此，竟引致一場關於誰抄襲誰的爭論，甚至導致其後幾乎一百年間英國數學家和歐陸數學家不相往來，使英國的數學水平在整整一個世紀中沉寂不前！這是數學史上一件非常不幸的事，也是一個發人深省的教訓。更叫人嘆息的，這場爭論還不是由"當事人"發起，而是由一位對萊布尼茲懷有敵意的瑞士數學家丟里埃(de Duillier)挑起，演變為狹隘民族主義者各擁一方的罵戰。但兩位"當事人"無可避免地給捲進了漩渦，他們的心情相信並不好過。事實上，正所謂識英雄重英雄，萊布尼茲曾對牛頓給予很高的推崇，他説："自天地初開以至牛頓活着的時代，全部數學中牛頓佔了一大半功勞。"

其實，這種爭認第一的爭論是十分無謂的。十七世紀湧現了一批卓越博學之士，他們當中不少人對微積分都或前或後或多或少作過貢獻，牛頓和萊布尼茲總其大成，畫龍點睛。這樣説，絲毫沒有低貶這兩位偉大數學家的重要貢獻，我們只是不要忘記他們所處的時代，在前兩節已經看到，因種種原因，微積分的基本概念到了十七世紀中葉，差不多都具備，已經到了呼之欲出的地步。有人把十七世紀稱為"天才的時代"，其實所謂"天才"，只不過指他們比一般人有更

敏鋭的洞察力、有更高遠的見識，也比一般人下更多苦功，比一般人更專心致志於熱切求真知。於是，他們把那個時代提供給他們的條件盡量發揮，為後世作出他們所能作出的最大的貢獻。牛頓便曾説過："倘若我比別人看得更遠一些，那是因為我站在巨人肩膊之上。"當別人問他怎樣有所發現，他簡要地答道："不斷地思考。"的確，牛頓經常每天工作十八至十九個小時，有時還長期守在實驗室裏徹夜不眠。

講微積分而不講牛頓和萊布尼茲，就像唱"空城計"沒有了諸葛亮！但既然微積分的基本思想在他們之前已具備，那麼兩人的貢獻又在哪裏呢？

首先，他們確立了微積分的體系。據牛頓自己説，他在1665年至1666年間發明微積分，但他有個不喜歡發表著述的習慣，使他的發現很遲才見諸文獻。主要文獻是1669年的《運用無窮多項方程的分析學》(遲至1711年才印行)，1671年的《流數法和無窮級數》(遲至1742年才印行)，和1676年的《求曲邊形的面積》(遲至1693年才印行)。他最有名的著述是《自然哲學的數學原理》，裏面除載有他的力學理論外，還載有他的微積分學説。牛頓寫作這部著述的日期，比前三部都要遲，但卻是第一部面世，那多虧好友數學家哈雷(Halley)大力推動，甚至掏腰包給他出版這本專著，所以在1687年見諸於世。至於萊布尼茲，大概在1676年左右獨立地發明了微積分，但比牛頓發表得早，第一篇關於微分法的論文刊登於1684年德國學術雜誌上，接着第二篇關於積分法的論文刊登於1686年同一部雜誌上。他本來把微分法叫做calculus differentialis，積分法叫做calculus summatorius，後來瑞士數學家詹姆士·貝努利(James Bernoulli)改稱後者作calculus integralis，這就是微積分英文名稱的來源。在牛頓和萊布尼茲之前，微積分是一些巧妙的方法，散見於各家的工作中。牛頓和萊布尼茲把這些方法歸結成一套普遍的有條理而又可以用符號操作運算的體系，所以稱它作calculus亦不無道理。我們今天只要稍懂微積分，便可以用同一種方法處理貌似毫不相同的問題，但在十七世紀中葉之前，每一個這樣的問題都要花上不少一流數學家的心思，而且每個不同的問題有不同的獨特解法，雖云巧妙卻未免予人"臨急周章"的感覺。關於這一點，我們能不感激牛頓和萊布尼茲嗎？

第二點貢獻，是他們(尤其是牛頓)把無窮帶進了數學。牛頓指出無窮級數的運算，可以看作是一般代數式的運算的推廣。例如他那著名的二項式定理，便是代數裏二項式的推廣。當N是正整數時，當時已有$(A+B)^N=\binom{N}{o}A^N+\binom{N}{1}A^{N-1}B+\cdots+\binom{N}{N-1}AB^{N-1}+\binom{N}{N}B^N$這種式，這裏的$\binom{N}{r}$是二項係數，即是從$N$項取$r$項的不同組合的數目。當$N$並非是正整數時，牛頓證明了$A^N+NA^{N-1}B+\frac{N(N-1)}{1\cdot 2}A^{N-2}B^2+\frac{N(N-1)\ (N-2)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{N-3}B^3+\cdots$這個式。以今天的眼光看，要找出二項式展開時的係數，只要把經典情況(N是正整數)的係數$\binom{N}{r}$寫作$N(N-1)\cdots(N-r+1)/(1\cdot 2\cdots r)$，即可馬上想到怎樣推廣了，但在牛頓的時代，這不是明顯的。事實上，牛頓發現這條定理，不是

用這種類比猜測，而是因他研究某些積分有以致之。反過來說，這條定理對於他發展微積分的工作也有極大作用，例如他便是運用這條定理來計算$y=x^n$的導函數，從而悟到微積分基本定理來。這種把無窮級數的運算看作是有窮級數的運算的推廣的想法，是有毛病的，一不小心便出紕漏，在第一章裏我們已經領教過了。不過，這種以有窮看無窮的想法，在數學史上是重要的一步，它打破了從古希臘開始數學家迴避無窮的習性，為數學開闢了一塊新天地。

在接着那二百多年間，數學家勇猛向前，發現了一個又一個新的定理，解決了一個又一個棘手的實際問題。但其實微積分的邏輯基礎是薄弱得可憐。這有點似一支突擊隊伍，輕裝前進，深入敵陣，攻陷了一個又一個的據點，但其實輜重軍需品和後援人手，完全落在後面。這是數學發展的一個現象，使外人感到不解和詫異。通常的人認為數學是最講求邏輯推理的嚴謹學科，怎麼它的發展竟是那麼不合邏輯呢？十八世紀英國數學家棣摩甘(De Morgan)說過："數學發現的原動力不是推理而是想像。"十八和十九世紀的數學家，憑着他們的膽識，把微積分發展得越來越深刻，也越來越有用。在這過程中，犯錯誤是免不了，但奇迹地在整整二百年間竟沒有產生什麼重大的錯誤，沒有使微積分整個學科走歪路，個中原因，除了當時那批數學大師的才智見識是卓越不凡以外，另一個原因就是當時的數學發展緊密地扣着物理學和天文學的發展。數學家的發現，在實際問題上得到驗證；實際問題的需求，也啟發了數學家的發現，於是數學家向前進攻時，更加信心百倍了。

在1734年英國有位主教伯克萊(Bishop Berkeley)寫了一部名叫《分析學者》的書，攻擊當時微積分理論的弱點，指出它根本毫無邏輯根據，只是"盲打盲着"！全書原名很長，名叫《分析學者，或致一個不信教的數學家(指的是牛頓好友哈雷)，其中審查現代分析(指微積分)的對象、原則和推斷是否比較宗教的神秘與信條，構思更為清楚，或推理更為明顯》，由書名可見伯克萊攻擊微積分的用意，不過從數學角度來說，他也的確揭露了很多需要面對的難題。這些困惑和難題越積越嚴重，到了十九世紀中葉，數學家強烈地感覺到有需要為微積分建立一個嚴謹的邏輯基礎，於是漸漸形成數學分析這一大領域，成為微積分的深化發展。