

「知易行難」或「知難行易」—— 一個中國數學家對 HPM (數學史與數學教育) 活動的觀察

蕭文強

香港大學數學系

[原文刊於：M. K. Siu, "Zhi yi xíng nán (knowing is easy and doing is difficult)" or vice versa? ----- A Chinese mathematician's observation on HPM (History and Pedagogy of Mathematics) activities, in *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia and India*, (Eds.) B. Sriraman, J. Cai, K. Lee, L. Fan, Y. Shimuzu, C. Lim, & K. Subramaniam, Information Age Publishing, 2013 · 現由陳鳳潔女士逐譯成中文。]

前言

三十五或四十年前，HPM (數學史與數學教育) 是相當嶄新的活動。這些年來，經過許多專家和教師不辭勞苦的努力，現在 HPM 已經不再是嶄新的活動了。多年來，世界各地不少人寫了文章，說明數學史在數學教育擔當的重要角色。第十屆國際數學教育委員會專題研究 (The 10th ICMI Study) 的討論核心，正是數學史在數學教學與學習所起的作用，研究結果結集成書：*History in Mathematics Education: The ICMI Study* (Fauvel & van Maanen, 2000)。好了，作為「宣傳」的論述已經夠多，應該花工夫於討論如何實行這樁任務。本文作者冀望通過這些年來他參與 HPM 活動所得所知，與讀者分享其中經歷，特別是在華人數學教育社群裡發生的事情。

現在大概是適當時候為本文題目中「一個中國數學家的觀察」作一腳註：「中國」這一名詞，並沒有狹義的國家主義，更加沒有排外的意思，它的真正意思，將於討論中明確

顯示出來；另外，「數學家」一詞，是指作者本人是專業數學家，並且在大學從事數學教學差不多四十年。本文將以這樣的背景展開討論。若讀者認為文章所述說的過於個人化，又或文章所列出的參考文獻過於傾向個人觀點，作者懇請讀者寬容，並藉阿拉伯詩人 Kahlil Gibran (1883-1931) 的散文詩 *My soul preached to me* (原文為阿拉伯文，1922) 中的一段話，請求讀者原諒：「你手提的燈並非是你的，你唱的歌並非譜自你內心，因為就算你帶著光，你不是光，就算你是一把扣緊了線的弦琴，你不是彈奏弦琴的人。」當一個人想做一點什麼，他必定發現他欠人家的遠多於自己能貢獻的。文章的參考文獻，不能稱為這個主題的詳盡參考資料，更說不上是最新近的，讀者如有興趣知道更多的說明例子和有關的書籍及文章，可參閱參考文獻中提供的書目。

在未開始正式討論前要澄清的是另一名詞 HPM。HPM 現已成為 ISGRHPM 的簡稱，ISGRHPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics 「數學史與數學教育之間的關係國際研究組」) 是 ICMI (International Commission on Mathematical Instruction 「國際數學教育委員會」) 的屬下組織，於 1976 年成立。本文中指的 HPM，須要採用更一般理解，它用作描述所有能達到這個國際研究組的目標和研究組關心的活動，但這些活動不一定由這個國際研究組主導。(讀者如欲獲取有關研究組和它的活動更詳盡的資料，可瀏覽 HPM 的官方互聯網站：<http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/>.)

初期

我開始學習數學史，源自一條跛了的腿 (不是我的！)。在哥倫比亞大學 (Columbia University) 獲得博士學位後，我在邁亞密大學 (University of Miami) 任教。1974 年夏天某一日，我系的主任告訴我，任教「數學概念入門」的同事跛了腿，請假一學期，要找代課。由於沒有其他同事對這一科有興趣，這項任務便落在我這個新近入職，又是最年輕的教師身上。離學期開始不到一個月，我得集中火力學習與思考，以便能夠設計一個我認為是合適的課程。這件工作看來像是苦差，但結果令我受益不淺。我把這過程記載在一篇題為 “Mathematics for math-haters” 的文章 (Siu, 1977)，這是我的第一篇與 HPM 活動有關的文章，雖然整整十年後我才真正碰上 HPM 這一名詞。後來，我在課堂

上獲得更多經驗，寫了一系列文章，作更詳盡的討論 (Siu & Siu, 1979; 蕭文強, 1983; Siu, 1985; 蕭文強, 1987; 蕭文強, 1992; Siu, 2000/1997) 。

其實，當時我對學習數學的意義還是感到很困惑。自入大學以來，我對數學十分感興趣，大學本科畢業後，我立志要當數學家。在研究生院我努力學習，研究代數 K-理論，在 Hyman Bass 教授指導下完成博士論文，獲得學位。我對 Bass 教授的教導，一生感激不盡。其後，我從事教學，要面對大群學生，他們當中大部份並不如我那麼喜愛數學，因此我要思考一個問題：「究竟我讀了這麼多年的數學，它是一門什麼樣的學科？」我應該如何說服學生數學是一門非常有意義、值得學習的學科呢？當時，我發現原來要說服自己更困難，因為我察覺到，我對數學的興趣，是源於由中學至大學得到的好成績，而不是源於自己對數學的內在熱愛。我在不同時期，為自己設定一些目標，終於成了數學家，可以從事數學研究工作和在大學任教。在享受學習數學的同時，我從來沒有反思數學的意義和本質；我對數學史的認識，只限於在中學和大學時期，通過閱讀一些數學通俗讀物獲得。有很多關於從前的人怎樣處理數學難題的問題，使我感到十分困惑；我明白到自己並不了解數學是怎樣發展到現在這個樣子。這一項新教學任務使我有機會深入閱讀、不斷思考、認真反思。初時，我的即時目標只是為了應付這項教學任務，但慢慢地我領悟到，或許我可以把數學史融會於其他我教的數學課程裡。自此時起，我對數學史的興趣與日俱增，學習數學是為了它的內在價值，而且總是對數學的內在價值懷著崇敬的激情。

自 1975 年夏天回到母校香港大學任教起，我便以「宣揚」數學史在數學教學和學習的作用為己任。我清楚記得，1976 年的夏天，我向一群從母校剛畢業的大學生作第一次有關數學史的演講。聽眾人數不太多，大概二十多位年青人，他們都滿腔熱忱非常留心聽講。這次經驗非常值得懷念，因為演講不是在演講廳或課室進行，而是在狹窄的小公寓內。公寓是由小組中幾個成員租賃，作為住所以及將要成立的畢業同學組織的臨時總部。在一個天氣悶熱的下午，小小的客廳擠滿了人，沒有空氣調節，視聽器材只是一塊白板（連幻燈機也沒有，不用說透鏡式投影儀、或實物投影儀、或數位投影儀）。很難想像今天的大學生，願意在悶熱的夏天，在一個既狹小又沒有空調的房間，聆聽兩小時沒有任何視聽輔助的演講。這些年青人的耐力和寬容，我只能歸因於他們的熱忱和對課題的投入。我把這個演講的內容，寫成我的第一篇 HPM 中文文章 (蕭文強, 1976)。

其後，我與這群年青人，在他們成立的香港大學畢業同學會一起工作了好幾年。1976年的十二月，我們發起了可能是第一個本地（非官方，即非由香港政府教育局舉辦）的數學教育工作坊。在這工作坊，我作了一個關於數學史可以如何幫助幾何學教學的講座。我把其中內容納入我的第一本著作《為什麼要學習數學：數學發展史給我們的啟發》（蕭文強, 1995a/1978）。這工作坊吸引了百多位教師參加，令人非常鼓舞，更令我想起，教師雖然經常受到官方課程的限制，但當團結起來，是可以起關鍵作用。這時一個念頭萌起，就是要成立一個數學教師的本地組織，不過，這要等到十九年之後，在更有能力的人士帶領下，香港數學教育學會才於1995年十二月成立。

早期幾年，在擔當數學史與數學教學的「傳道士」的工作中，自己感覺是個孤獨浪人，正在表演獨腳戲。但1984年的夏天，我到阿得雷德（Adelaide，澳洲）參加ICME-6（第六屆國際數學教育大會），在一個工作坊，遇到從挪威來的Otto Bekken，事情發生了變化。Bekken與我對HPM的活動有同樣的熱忱和理念，同時我又知道，原來有一個國際群組對這些活動有同樣興趣。他更邀請我在1988年八月到挪威的小城Kristiansand參加一個由他策劃的工作坊，在那兒他介紹我加入這HPM小組，然後我慢慢成為小組的活躍成員。

在Kristiansand的五天工作坊，我們根據數學課程中的一些主要概念和方法，從數學史當中發掘、討論和研發一些實在的意念，以此用作激發、說明和提升對這些概念和方法的理解（Swetz, Fauvel, Bekken, Johansson & Katz, 1995）。工作坊的二十四名成員，有數學家、數學教育家、數學史家，來自五湖四海，有不同的文化和學術背景，但大家相處得異常融洽，互相擷長補短，成為一個志同道合的小組。我們互相學習和一起爭辯；討論經常在沒有拘束的友好氣氛下進行。工作坊在一所寄宿學校舉行，環境恬靜優美，更有助進行討論。除了在早上和下午已安排好的講演/討論時段進行意見交流，也會在茶點時間、午飯或晚飯間，有時甚至入夜後（其實天還未黑，北歐晚上十時天還很亮呢！）還繼續。甚至在每天清晨，大家穿過叢林往湖泊早泳途中，在蜿蜒曲折小徑上也進行討論。當時我是新加入小組的成員，其他很多組員在ISGRHPM已經很活躍。自加入小組開始，我馬上受到如親人一般的熱情接待，一再證實我的信念：一個人對數學史尊敬，他內心會產生一種友善、溫柔、仁慈、開放和深思的態度，這種態度不單在學科上的學術承擔方面表現出來，也會在人生其他方面顯示出來。

一般架構

繼續闡述之前，讓我先講一下我心目中的 HPM 活動。教學就是說故事，說一個能引起好奇、激發想像力的好故事，說一個關於人類如何運用智慧不斷探索及理解周圍客觀世界的故事。在這方面，數學史是特別合適這項工作的組成部份。無論在自然科學或人文學科，都反響了這個觀點，讓我引用下列兩段話以作說明。

Peter Brian Medawar (1915-1987)，諾貝爾生理學/醫學得獎人，其著作 *The Hope of Progress* (1972) 中有以下一段話：

一位科學家當前的思想和行動，必然因之前別人所作所想而形成；這些思想和行動是現世連續進展過程的「波前」(wavefront)，而「過去」在過程中並沒有自己獨立的、莊嚴的存在。科學知識是學習過程曲線 (curve of learning) 的「積分」(integral)，因此，在某種意義底下，科學本身包含了它自身的歷史。

Thomas Stearns Eliot (1888-1965)，諾貝爾文學得獎人，在其著作 *Tradition and the Individual Talent* (1917) 曾說過：

傳統有其更廣泛的意義，它不能繼承而得，若要得到它，你必須付出艱苦勞動；首先，它包含歷史意識，我們甚至可以說，對於一個二十五歲以上，仍想繼續寫詩的人，那是不可或缺的；歷史意識涉及一種知覺，不單是感受到過去的過去性，也感受到過去的現存性。... 一位作家要成為傳統的，要有一種歷史意識，這種歷史意識是超越時間性的感覺，也是有時間性的感覺，也是兩者結合起來的感覺。

這些想法使我以 Johann Wolfgang von Goethe (在他的 *Theory of Colour* 1808) 的話略作修改概括我的信念：「數學 (科學) 的歷史就是數學 (科學) 本身。」

數學史是一個學術科目，一如其他學術科目，它有自己的研究範圍、成果和文獻。雖然我不時涉獵其中，我只能算是這科目的業餘愛好者，不能聲稱自己是數學史家，頂多只能說自己是「數學史之友」。我更有興趣於如何把數學史與數學的教學結合起來。這樣說並不等於提倡在中學和大學要教授數學史，我認為在中學教數學史並不合適；在大學，它

可以是一門選修科，但並不是數學本科生的主要必修科。不過，我要提倡的是，所有級別的數學學習，可以結合數學史，自其中提取適當材料，從而提升和豐富我們的教學，並傳遞一種歷史意識。

我的看法基於兩個原因。首先，我堅持的信念是：數學是文化的一部份，它並不只是工具而已，不論這工具有多大用途；因此，數學的發展歷史，以及由古至今數學與其他人的奮鬥活動的關係，都應該是這學科的一部份。其次，我的教學與學習經驗告訴我：數學史知識幫助我更深入了解數學內容和改進我的教學；其實，把數學史融入教學以達致這目的只不過是眾多方法其中之一；任何方法能夠使學生更好理解數學、對數學產生興趣，都是好辦法。數學史未必是最有效的選擇，不過我相信，只要恰當運用，它可以是有效的；而且，數學史知識可以令教師「更富耐心、減少專橫、更富厚道、減少迂腐」，並鼓勵他們「多思考、更熱愛學習、更有熱情承擔教學任務」（Siu, 2000/1997）。

2004年於丹麥哥本哈根舉行的ICME-10，當中一個專題研究小組（TSG17）與HPM活動有關，University of Crete的Costantinos Tzanakis教授和我共同主持這個小組。我們指出，「雖然數學史是非常重要的，但我們不能視之為解決數學教育各項問題的萬應靈丹，這就好像數學科本身雖然重要，但不是唯一值得學習的學科」；我們更指出，「就是因為數學能有機地融入其他知識和文化活動，數學科才成為更值得學習的科目」（Siu & Tzanakis, 2004）。在這樣更廣泛的層面來說，數學史在提供全人教育擔當一個重要角色，與目前普及教育的「大眾數學」主題甚為吻合（蕭文強, 1994）。

我曾經把數學史的作用比擬作一頓膳食的前菜、主菜或飯後甜點，意思是它能起的作用分別是引起動機、設計學習內容、增添豐富課程內容。不過，與飲食類比不同，更恰當的是，在課堂中使用數學史時，不應把它的作用嚴格劃分類別。其實，更惹爭議的是，我們應否說「**使用**數學史」，也許，應該說**結合**，甚至**融合**，更為合適。

三項與學習數學史有關但卻是各自獨立的活動是：（1）進行數學史研究；（2）講授數學史；（3）把數學史結合於數學教學和學習上。HPM的活動集中於第三項，同時又可以把這活動細分為三項：（3a）學習和教授數學中的某一課題；（3b）提供學習數學的一般動機和樂趣；（3c）培養更深刻的數學意識，認識數學的社會與文化背景。

如何實踐有以下四個方面：(1) 詳細考慮數學、歷史、數學教育、其他學科，它們之間關係的認識論問題；(2) 豐富所有級別的教師教育：向教師提供數學史與其他學科關係的課程，讓教師熟識由數學史啟發的教材，無論是在課堂使用或曾使用過的；(3) 編寫制訂適當切題的教材，可以馬上在課堂使用，或作為數學教師的參考材料；(4) 提供具體例子以及其背後的理念，說明數學史如何能激發學生的興趣、提高對數學成果和理論的認識、加深他們認識數學的真正意義 (Siu & Tzanakis, 2004)。

也許這是適當時機說明一下本文題目中「中國」的含意。在上世紀七十年代初，我第一次接觸數學史時，我對所有文化的數學史都有興趣，因為數學是全世界人民共同擁有的遺產。當時我在西方國家學習和教學，所以接觸最多的是古希臘的數學，如歐幾里得 (Euclid) 的《原本》，以及歐洲自文藝復興以來的數學。至於古文化如埃及、巴比倫、印度、中國或伊斯蘭世界的數學，在我閱讀的文獻中只有寥寥幾頁。直至一天，我讀到李約瑟 (Joseph Needham, 1900-1995) 的七冊偉大巨著 *Science and Civilization in China* (1954-2004)，其中一冊是關於數學的。當時我真是愚蠢無知，並不知道原來自二十世紀初，已經有中國歷史學家做了大量中國數學史的研究，李約瑟是向西方世界介紹這門學科的西方典範學者。我在邁亞密大學教的課程，添加了一些古代中國數學，非常受學生歡迎。可能他們認為，由中國人教的中國古代數學史，一定可信，其實我跟他們一樣，也只是第一次學習！這次成功的嘗試，使我想知道更多；作為中國人，我有更有利因素，我曉得怎樣尋找閱讀材料，我懂得閱讀中國數學史家以中文寫作的書本和文章，我也能夠閱讀那些用古文書寫的原材料。(我得承認我閱讀古文的能力只是馬馬虎虎，因為古文與現代中文非常不同，慶幸的是我們在中學時要學習閱讀和理解一些古文，古至漢朝、唐朝，甚至距離現在超過二千五百年的「春秋」與「戰國」時期。)

我在香港出生，在雙語 (中文、英文) 教育制度下長大，影響了我對中國數學史的興趣和學習。我生活的地方，曾經一度由英國人統治 (1842 至 1997)，百分之九十五人口是中國人。我的學校教育讓我重視中西文化的對比，例如，在比較古代希臘和古代中國做數學的方法時，我從古代東方及西方的例子尋找數學證明的概念，解釋什麼是數學證明 (蕭文強, 2007a/1990; Siu, 1993; Siu, 2008)。(這個涉及教學法的問題，我在第 19 屆 ICMI 專題研究學習小組的文章，有更詳細的闡述 (Siu, 2012)。)

由於個人背景，我也研習古代中國的數學課程和東亞的數學教育歷史 (Siu, 2004; Siu, 2009b)。這個課題在教學法上有特別意義，原因是近十多年來，教育界突然興起關注所謂「儒家傳統文化」(Confucian heritage culture, CHC) 主導的課堂環境，如何影響教學與學習的過程 (Watkins & Biggs, 1996, 2001)。所謂「CHC 學生悖論」和「CHC 教師悖論」的一般解釋，在於仔細區分重複學習與死記硬背學習。不過，悠久深厚的考試傳統顯然在 CHC 盛行，而人們一般相信應試文化會阻礙深入的學習。通過仔細研究唐朝 (618-907) 官方考試中的數學科，我們希望從歷史角度看到這個問題的一些端倪。自二十一世紀初開始，中國大陸有一群學者，主要是數學史家，安排一連串數學史與教育的學術研討會。我期待從他們的工作中，學習更多中國數學史的知識。這個不斷壯大的群組，以他們的熱心行動和專業知識，將會加強 HPM 的活動。

作為中國人，我自然會滿懷自豪地學習祖先的數學成就。不過，我常常把他們的成就看作為世界整體的數學發展的一部份。猶如 David Hilbert (1862-1943) 1928 年在意大利 Bologna 舉行的國際數學家大會 (International Congress of Mathematicians) 所說：「數學無分種族。...於數學而言，整個文化世界就是單一個國家。」誠然，我對數學發現的先後，是東方還是西方，不感興趣。無論如何，如果為了說明本國國民的優越性，強調中國人基本上比歐洲人早了好幾個世紀發現某一數學定理，只能間接說明歐洲數學的優越性，因為這樣的比較是以西方數學為基準！實際上，我認為應該以互相學習的心態，去察看不同的數學文化，才會更有成果。

二十世紀八十年代起

作為數學教師，我希望學生可以在以下的課堂文化與環境成長：可以讓他們養成積極和有效的學習習慣，因而能夠接觸並閱讀參考材料；能夠清楚以話語和文字與人交流；能夠從數學中明白道理，並能向別人解釋他們所知道的；願意去思考、去提問、去挑戰和探究；親自領略數學經驗，以便體會數學的雙重性，即數學既是精確的科學又是富想像的活動，是抽象的理性研究又是具體能應用於生活的科目；欣賞數學優美之處，它的重要性，它的力量，同時理解它的局限。

大部份學生完成學業後都不會使用很多數學，但是我們希望他們能夠知道什麼是數學（蕭文強, 1994），希望他們不把數學單看成是技術性工具，當然它有這個特性，但更重要的是，數學是心智的活動，是思考的方法。若然如此，便能幫助他們建立自己對數學的看法，令他們相信數學是一門有益的學科，在歷史上它對人類文化廣泛地擔當了主要的角色。在這方面，HPM 活動要處理兩類不同的問題，即 Uffe Thomas Jankvist 提到的「內在問題」（in-issues）和「外在問題」（meta-issues）（Jankvist, 2009）。「內在問題」關係到數學的概念、理論、定理、方法、技巧，以及其潛在的動機和背景。「外在問題」包括如何看待數學這門學科，學習它的本質，它的思想方法，和它與文化以及人類其他社會活動的關係。我對數學史感到興趣的初期，著重於「內在問題」，但後來，在上世紀八十年代中，我同時也關注「外在問題」。到了九十年代後期，我的興趣更擴散開，初期是在數學與科學之間的密切關係（Siu, 2011/2008），後來更擴展至數學的文化層面（蕭文強, 2007b; Siu, 2008; 蕭文強, 2009a）。

Hermann Weyl（1885-1955）曾經說過：

我們並非宣稱數學應該享有「科學之后」的特權，有其他領域的學科與數學有同等甚至更高的教育價值。但是，數學立下所有心智活動追求的客觀真理標準，科學和科技是它的實用價值的見證。如同語言及音樂，數學也是人類思維自由創作力的主要表現形式，同時它又是通過建立理論以認識客觀世界的普遍適用工具。因此，數學必須繼續成為我們要向下一代傳授的知識及能力的重要成份，也是我們要留傳給下一代的文化中的重要成份。

自 2000 年起，我開設「數學——文化的傳承」這一門課已經十年了，為了詳盡闡述 Weyl 的規勸，我嘗試從數學的悠長歷史中，找一些關於日常生活、其他人類社會活動以及大自然的例子，重點不是放在傳授一籃子的數學技術知識，而是放在欣賞、思考和討論數學之「美」、「用」與「道」。

我關心中小學的數學教育，曾努力與教師一起工作，目的是鼓勵更多教師參加 HPM 活動。為達到這個目的，自 1976 年至我退休的 2005 年間，我開設了一門稱為「數學發展史」的課（Siu, 2000/1997）。與此同時，我與香港政府教育處（1997 年改稱為教育

局，EDB) 的數學組緊密合作，因為他們的官方地位，擁有更大的教師網絡，我們一起舉辦的活動包括不定期的研討會和工作坊。

在以考試為本的教育環境中工作，我作為 HPM 一名倡議者，工作成果一直不太理想，直至較近期 (2007 年夏天)，在 EDB 同事鄧美愉的熱情領導下，並有經驗豐富的資深中學教師梁子傑的全力支持，一個數學史學習小組成立了。小組每年約聚會四次，雖然只有十多名中堅份子，每次聚會各人都暢所欲言，分享意見和經驗。了解到本地教師所背負的沉重教學工作和工作壓力，我十分欽佩這批老師的教學熱忱。這個經驗尚淺的小組，對比我在一些 HPM 會議碰到其他的地區的教師，只算開始走出一小步，還有漫長的路要走，不過我們在努力。

2010 年三月和 2011 年三月，通過組員的努力，我們舉辦了兩場研討會。第一場的題目是：「三角學交響樂，作品編號 360：弦的和聲」(Symphony in trigonometry, Opus360: Chords in harmony)；第二場的題目是：「數系的發展」(Development of number systems)。兩個題材都與本地課程有密切關聯，因此每次都吸引了過百名教師參加。在準備這兩場研討會的過程中，這兩特定題材的性質，促使我關注到應該如何從三個觀點考慮問題：歷史觀點，數學觀點和教學觀點。雖然這三個觀點都是相關，但它們並非相同。根據歷史發生的過程而安排教學程序，未必最合適。從數學角度看來是最好的數學，放到課堂未必如是，而且歷史通常都不是這樣發生的。不過，這三個觀點卻互相配合和互相補充。若教師知道一些歷史觀點，有堅實的數學觀點，把重點放在教學觀點，對教學會有好處。為了清楚說明這個方面，我會多談一些有關這兩個研討會。

第一個研討會所討論的題材，是一個用來說明教學的次序**不能**按歷史發展次序的好例子。三角學是從學習天文學和計算曆法的過程發展起來，但學生會覺得這些問題太複雜，因為須要使用球面三角學。不過，我們可以從很多的相交點，找到能結合這個課題的教與學的歷史材料。三角學出現於不同的學術範圍(幾何、代數、微積分)，程度有深有淺。因此，教師可能希望知道，三角函數在初等數學出現的樣貌，為何與在高等數學出現的那麼不同。我認為有幾個不同的主題錯綜複雜地交織起來，開展猶如交響樂章，中間會有變奏。因此，在擬訂研討會的名稱時，我想出這個帶有雙關語玩味的標題。(「[半]弦」([half] chord) 古時相等於正弦的意思。「和聲」(harmony) 在 Fourier Series 中的三角函數是有意思的。)

研討會以三角學由古代至中世紀的歷史發展描述開始，希望表達的倒不是全面和技術性的描述，而是通過一些例子顯示古代人解決三角學問題的艱辛經歷。（兩本有用的參考書籍：Glen van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry* (2009)；Eli Maor, *Trigonometric Delights* (1989)）接著是討論三角學在中國的歷史發展（大部份都是在十七和十八世紀由歐洲傳入的）。為了在教學上結合這些課題，我們舉辦了如何在課堂使用歷史材料的工作坊，由幾位教師領導，分享他們在這方面的教學經驗，並且與參加者交流作業設計的心得。

第二個研討會的題材，是由一般坊間課本刊載的所謂「數系樹圖」激發起，這個圖把各個數系的關係清晰表示（然而太清晰了，而且嚴格說來，它不是樹圖，因為所涉及的關係並不完全依等級次序劃分）。在研討會的簡短開場白，我強調了數系的發展是如何錯綜複雜，不是人們從「數系樹圖」一般得到的印象那麼清晰和有條理。這種看法呼應了我們從幼兒園至專上學院裡學習各種數系概念的過程，由含糊到精確，與它們在歷史的發展的過程相同。這個觀點，在研討會後半議程，由幾位教師負責介紹他們教授幾個特選課題（整數、有理數和無理數、代數數和超越數、複數）的經驗時，得到證實。（一本有用的參考書籍是由 Ernst Sondheimer 和 Alan Rogerson 合著的 *Numbers and Infinity: A Historical Account of Mathematical Concepts* (1981)；另一本程度較高的參考書籍是 *Numbers*，(1991 翻譯自 Han-Dieter Ebbinghaus 等合著的德文版 *Zahlen*, 2nd edition, 1988)）。在研討會的結束語中，我解釋並用例子說明歷史、數學和教學這三方面的關係，用的例子是從研討會的內容揀選出來的，例一是「負負得正」，例二是「非唯一因子分解和質元與不可分解元和理想數」，例三是「 $0.9999\dots$ 是否等於 1？」。

所遇困難

2005 年在香港舉行了一個為教師辦的 HPM 工作坊，我以「知易行難，還是知難行易？」為題目作演講。原來的格言「知易行難」出自中國古代經典著作，概括了中國人的一項人生智慧。二千多年後，於 1911 年創立中華民國的孫中山先生，為了強調要有積極的態度看待行動，而不是被動地等著瞧，把格言改為「知難行易」。後來有些著名的學者更引申為「知難行難」。無論人們同意哪一種說法，沒有人膽敢說「知易行易」。西方也

有類似的說法，例如「不盡力嘗試便沒有收穫」或「沒有免費的午餐」！要開展 HPM 活動，一定要投放時間和精力去裝備自己，沒有什麼可以取代自修學習。我的經驗是，知識只能通過經年累月永不休止地一點一滴累積起來；工作並不容易，但富有意義和充滿樂趣。就我理解，不參與、不開始，便不會有任何成果。

有人會認為「行易」，因為只用展示幾幀著名數學家的照片，說一兩件有趣的軼事，或指出一些著名定理的發現年份。這都是很多教科書的做法，是很容易做到的。除了這些，他們便覺得「行難」。差不多所有人都知道，數學史為學習數學帶來正面作用，所以「知（它的重要性）易」，但卻又「知難」，因為他們知道使用歷史材料於教學中是困難的。1996 年的一個本地試點研究，發現教師對數學史給予高評價，但同樣是這組教師，他們對在教學上實際使用歷史，又給自己打低分數（Lit, Siu & Wong, 2001）。

可以在教學上使用的數學史材料其實並不缺乏，這從過去多個 HPM 和 ESU（歐洲夏季大學，European Summer University）會議上發表的眾多文章可見，但為何教師還猶疑於是否把數學史與數學教學結合呢？1998 年第十屆 ICMI 專題研究會議在法國的 Luminy 舉行，我在全體會議上發表了講話，表達我所關切的問題。講話中我有意扮演唱反調的角色，羅列一連串教師不採用數學史的「反對」論點。雖然，很多熱心人士，包括我自己在內，會很容易對這些「反對」論點提出反駁，但是我建議要從正面看問題，應該更謙虛，不須要只為自己辯護。能幫助學習和教授數學有很多方法，使用數學史是其中的一種，不是唯一，更不是最好的（要是真的有最好的教學方法）。我們可以用這些「反對」論點作為告誡，當使用數學史教學時，不要墮入這些陷阱。我們投放力量提倡使用數學史，但最終還是要由教師去實行，因此能否成功，有賴教師的承擔。

隨著時間過去，我有機會與更多教師交談，使我越來越明白，一個熱誠的 HPM 皈依者，不應該只是停留於扮演唱反調角色，心底裡卻仍然是 HPM 的忠實信徒這種單向心態。我把這個意念發表在另一篇文章，題目是：「不，我教數學時不使用數學史。為什麼？」，2004 年於瑞典 Uppsala 市舉行的 HPM 會議上宣讀。文章討論了十六項教師不願意使用數學史的原因（Siu, 2006），我還希望他日可以再深入討論這個問題。（David Pengelley 曾經對此發表了一些有建設性的反響（Pengelley, 2011））。

展望未來

在 1998 年第十屆 ICMI 專題研究會議，我的演講題目是：「(不)完全四點形：數學史家、數學家、數學教育家和數學教師 [The (in)complete quadrangle: Historians of mathematics, mathematicians, mathematics educators and teachers of mathematics]」，靈感源自我對組合設計的研究興趣。有限射影平面的最簡單例子，是 Gino Fano (1871-1952) 的七點結構圖，對這方面的研究人員來說，它像是這個領域的標誌，以四個端點連帶著三個對角點組成所謂「完全四點形」(complete quadrangle)。這個圖讓我想起題目中的四組人和他們的相互關係。有限射影平面有一格言是：每點(或線)都有同等地位，其重要性是觀點與角度的問題，亦會隨情況而變更。我認為這種看法也適用於題目中的四組人。不過，Gino Fano 的七點結構圖當中有四點組成一個「調和四元組」(harmonic quadruple)，那麼，我想知道這四組人是否也能成為一個「和諧的四元組」(harmonious quadruple)。

討論這個問題之前，我們須要先討論一些關於知識和能力作為數學教育目標的基本問題，例如：(1) 數學史如何幫助達到這兩個目標？(2) 它對達到目標是否有直接或間接的幫助(促使考慮認識論上的障礙、提高士氣、引起興趣、提供學習動機等等)？(3) 使用數學史是否有時反而妨礙思維前行，因而不使用更為有效？(4) 思想未成熟的少年對數學史會有怎樣的反應？他們能否欣賞其巧妙之處？(5) 如果沒有好好地處理數學內容便引進數學史，是否像在路邊不起眼的小店吃漢堡包，卻以香檳酒和魚子醬伴食？

現在，我們得回到那四組人的「完全四點形」，因為他們須要互相合作，成為「和諧的四元組」，以試圖解答以上問題。為了突顯這四組人的情況，我將會在討論中使用一些苛刻並誇張的語言，但事先聲明，我完全尊敬這四組人。(我本人也屬於至少其中一組，因此同樣的譴責也適用於我自己身上！) 數學家太過關注他們的研究，有很多人對教學並不熱心，他們把教學看成差不多只是維持生計(也許只是為了保持職位以進行研究工作)的活動，而非是自己事業的一部份。他們對中小學的數學教育更加不感興趣，除了有些人因為子女在學校上的數學課乏味無新意，他們才會偶然慨嘆一下學校的數學教育的不是。他們對數學史沒有興趣，甚至有些輕蔑，認為是那些沒有能力做真正數學的人所作的虛飾；他們以同樣理由看待數學教育家。

相應地，很多數學教育家也找不到與數學家的相同興趣；做教育研究的學者與中小學教師接觸也不多，除了作為實習課的導師時，曾經觀察過中小學教師的幾堂課；大多數數學教育家都不認為數學史會對他們的工作有幫助。

大部份（中、小學）數學教師除了在大學上數學課和在教育學院受訓外，與數學家或數學教育家都沒有什麼接觸，他們認為這兩組專家的研究與他們的日常教學無大關係。很多甚至不知道數學有它的歷史，又或是知道，卻認為數學史與他們的教學完全無關重要，因為他們只教授能應用於今天的數學。

數學史家可能是四組中最寂寞的一組。這個群組很小，每個人研究的題目或年代與其他人的好像不相關。數學家不是忽視他們，便是對數學史毫不認真對待而令他們感到不是味兒。數學史家的專業訓練與其他人十分不同，因此他們與其他三組人也很難溝通。

讓我們想一想，在其他科學領域，如物理、化學或生物，是否也有類似的「四點形」？它是否形成「和諧的四元組」呢？我的中學學習經驗告訴我，這些科學的歷史，十分自然地融入該科的內容。物理、化學或生物課堂，充滿了經典實驗、理論的演化（或爭議）、自古以來著名科學家的工作。教學時教師無須刻意使用歷史，學生也會明白這門科學有它自己的歷史。

為什麼數學不是這樣呢？數學是否在很多人的心目中變成一門抽象的學科，是智性的構作，如此抽象以致我們不用關注它的過去，也不用理會前人作了些什麼使它進展？其實，如果人們（好像）只是自己創作問題又同時自己去解答它，究竟什麼叫做進展呢？看來，好像我們不用知道數學的歷史也可以在數學上有成就；反過來也可以說，懂得數學史未必可以幫助我們取得成就。不過，歷史告訴我們不是這樣的，那些有重大成就的數學家，一般都對歷史有深刻領會。用 Niels Henrik Abel (1802-1829) 的話：他們向大師（不是向學生）學習。Henri Poincaré (1854-1912) 說：「如果我們要預測數學的未來，我們應該研究它過去的歷史及其現況。」André Weil (1906-1998) 在 ICM-1978 大會上發言時，借用了 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) 的一句話：「歷史的作用不單是為了給予每人應得的評價，讓其他人盼望可以獲得類似的讚賞，也是為了提升發現之道，通過這些光輝事例讓這些方法流傳於後世。」

西方世界的數學發展，源自古希臘時代，以歐幾里得的《原本》為典範。有時我會想，西方的數學發展，究竟對形成上述數學的「內向性」有多少影響？數學發展在希臘文化以外的世界，並不按照這個形式。大家應該承認，自十七世紀以來，西方主導了數學領域。我們能否從東方與西方的不同思想方法，和對數學的不同見解，得到一些啟發？在數學教育層面，我們能否同時吸收「辯證法」(dialectic) 和「算法」(algorithmic) 這兩種做數學的不同方式 (Henrici, 1974)，即如中國哲學裡的「陰」和「陽」，讓它們互相配合和互相補充 (Siu, 2012)？

現在讀者會明白為什麼我在 ICMI 的演講題目「(不)完全四點形...」中加上「(不)」這一字的意思。我們是否應該擴大伙伴層，向其他人取經學習，例如科學史家、哲學家和其他學科的教師？Wendy Troy 在 2004 年於 Uppsala 舉行的 HPM 會議上，發表了一段與此有關的話，值得我們細心思索：

我從這些經驗明白到，不單是數學課可以進行這些活動，歷史、地理、宗教教育課也可以讓學生更接近數學「發現」的背景，對比數學課本列出的零碎歷史小故事，這樣做更為奏效。... 好的開始可以是，教授人文科目如歷史和地理時，也涉及數學史、科學、語言、藝術、宗教等，這樣做的話，數學教師上課時，便可以有更多的例子和材料去採用 (Troy, 2006)。

換句話說，HPM 群組如果和其他科目的教師溝通和合作，會有更好成效。

我希望各方可以合作，共同創出一個樂於接受數學史的數學總觀。社會上各人的數學觀都不同，但這些數學觀合起來，便會冒出一個通行社會的數學總觀。歷史告訴我們，在各時代和各地域，數學發展與數學教育在很大程度上，都是由通行社會的數學總觀主宰的 (Siu, 1995b; 蕭文強, 2009a)。

明顯地，製作更多可以在課堂上使用的帶有歷史意味的數學教材，有利於達到 HPM 的目標。問題是：「怎樣製作這些教材？誰去製作？」被動地依賴由他人製作的現成教材不夠好，教師們要明白到自己可以主動投入製作；而且，把現成的教材視為操作指南，照單全搬，也不會有好效果。沒有經歷過在數學史的浸淫，教師不能洞察其中的精髓，不能充滿信心把數學史與教學結合，特別是碰到一群熱情好學而且求知心切的學生時，教師被迫更改已準備好的教學程序，從而使全班學生更加受益；這個時候，這種信心

尤其需要。多少年來，我在這項工作上都是單打獨鬥，因此更加珍惜 HPM 群組的協同工作和整體合作精神。

一直以來，我十分珍惜和享受 HPM/ESU 的會議。我能在大學的數學家、數學教育家、中小學數學教師、數學史家組成的群組參與活動，除了學術交流，我與老朋友重逢，又結識新朋友，感到非常愜意。在珍惜和享受這令人舒暢的群組活動之餘，我又擔心 HPM 的活動能否持續下去，特別是，我擔心這組人會變成一個友善和關係密切的群組，不過組員只會與自己人交談，忽略了組外的人，變得像大家所說：「向信教的人傳教」。

對於局外人來說，我們可能不夠說服力，或許因為我們並不以即時成效去衡量我們的努力。Andrew Russell Forsyth (1858-1942) 在 1897 年的講演，帶出了一個信息：「數學是最古老的一門科學，也是最蓬勃的一門科學，它的力量就是永恆的青春活力」。諷刺得很，由於我們深信數學史可以為這個信息作腳註，便往往漠視很多（還沒有皈依 HPM）數學教育家提出的問題：「有沒有實際數據證明，在數學課堂上運用數學史，令學生學得好一些？」（Siu, 2006）。在 HPM 群組中，我們不一定把基於實際數據的研究作為 HPM 活動的試金石，正如我曾經說過：「在數學課中使用數學史，不一定會使學生馬上取得高分數，卻可以使學習數學的經驗變得有意義和生動活潑，（希望由此）令學習進行得更順利更深入。」（Siu, 2000/1997）。我們的信念是：「我們相信那是有用的，不管有沒有即時的成效，我們都會這樣做」。不過其他人會誤解，認為這是我們迴避問題的自辯。

除了製作教材和進行基於實際數據的研究，第三件可以做的事情，是鼓勵 HPM 組員記錄他們在課堂上的 HPM 活動。2004 年 ICME-10 的 TSG17 小組活動中，馮振業（香港教育學院）發表論文時播放了一段錄像，記錄他如何向小學生講解埃及分數（Fung, 2004）。就算這不是系統性的全面科學研究，檢視數學史在課堂是否有效，至少它在情感層面上提供了一些證據。我們歡迎更多類似的記錄。另一範例是洪萬生（國立台灣師範大學）的「團隊」進行的專題研究，「團隊」成員除了描述他們學習古代文獻、設計學習作業和學習單元以備課堂之用的過程，還特別強調，作為教師，他們如何通過共同學習成長起來。這些例子說明，HPM 活動在更廣泛的數學教師和數學教育家群組中，能夠產生有效成果。

如果讀者有耐性閱讀至此，一定會發現我既沮喪又充滿希望的複雜心情。積極方面，我把沮喪看成是挑戰，把希望看成是承諾。因此整體而言，我對 HPM 的活動充滿信心。自 1976 年夏天我在那狹小的房間，向著一群年青的大學畢業生作演講時，這種樂觀的態度已經在心中播種。

後記

小時候，我喜歡閱讀牛津大學數學家 Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) 以 Lewis Carroll 為筆名寫作的《愛麗斯夢遊仙境》(1865)，書中伯爵夫人所養的柴郡貓咧嘴露齒的笑容，給我留下深刻印象。Samuel Eilenberg (1913-1998) 對代數有如下的說法：

現代數學最觸目的潮流是「抽象」代數的快速發展，差不多所有當代數學定理都有代數的某個環節。現代代數涉及的數學結構，堪可比作《愛麗斯夢遊仙境》書中的柴郡貓的咧嘴笑容，貓兒消失後我們還可以看到它的笑容。代數的力量在於推廣，往往使我們省卻不少氣力。注意到一些看來不太相同的問題其實基本是相似，便想到某一問題的解，可以如何變更成為解答另一問題的方法 (Eilenberg, 1969)。

只有咧嘴笑容而沒有貓兒，是不合情理的。現代數學縱然只是像貓兒的笑容，它之所以合乎情理，皆因它的歷史——那貓兒——存在，但它卻常常是隱形的。

2004 年在 Uppsala 舉行的 HPM/ESU 會議，我和妻子投宿於一所小型舒適旅店。旅店位於一座有趣的六角形兩層高建築物。店主以沒有兩間房間的形狀相同為傲。(我們住在一間五角形的房間！) 如同這所旅店的房間一樣，沒有兩名學生或教師是完全相同的，他們的差異，正是多姿多彩並且生動活潑的教學、學習、數學史與前二者結合的根源所在。

參考文獻

- 蕭文強 (1976). 數學發展史給我們的啟發. 《抖擻雙月刊》, **17**, 46-53頁; 亦刊於: 蕭文強 (2009a) 88-99頁.
- 蕭文強 (1983). 數學、數學史、數學教師, 《抖擻雙月刊》, **53**, 67-72頁; 亦刊於: 蕭文強 (2009a) 101-112頁.
- 蕭文強 (1987). 誰需要數學史. 《數學通報》, **4**, 42-44頁.
- 蕭文強 (1992). 數學史和數學教育: 個人的經驗和看法. 《數學傳播》, **16** (3), 23-29 頁; 部份亦刊於: 蕭文強 (2009a) 113-119頁.
- 蕭文強 (1994). 我看「大眾數學」刊於: 嚴士健 (編) 《面向21世紀的中國數學教育》 (256-265頁). 南京: 江蘇教育出版社; 亦刊於: 蕭文強 (2009a) 20-27頁.
- 蕭文強 (1995a). 《為什麼要學習數學? --- 數學發展史給我們的啟發》台北: 九章出版社. (原書出版於1978, 香港: 學生時代出版社.)
- 蕭文強 (2007a). 《數學證明》台北: 九章出版社. (原書出版於1990, 南京: 江蘇教育出版社.)
- 蕭文強 (2007b). 「歐先生」來華四百年. 《科學文化評論》, **4** (6), 12-30頁; 亦刊於: 蕭文強 (2009a) 195-220頁.
- 蕭文強 (2009a). 《心中有數》台北: 九章出版社; 2010, 大連: 大連理工大學出版社.
- Eilenberg, S. (1969). The algebraization of mathematics. In National Research Council' s Committee on Support of Research in the Mathematical Sciences (Ed.), *The mathematical sciences: A collection of essays* (pp. 153-160). Cambridge : MIT Press.
- Fauvel, J., & van Maanen J. (Eds.) (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fung, C. I. (2004). How history fuels teaching for mathematising: Some personal reflections. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **3** (1-2), 125-146.
- Henrici, P. (1974). Computational complex analysis. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **20**, 79-86.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **71**(3), 235-261.
- Lit, C. K., Siu, M. K., & Wong, N. Y. (2001). The use of history in the teaching of mathematics: Theory, practice, and evaluation of effectiveness. *Education Journal*, **29**, 17-31.

- Pengelley, D. (2011). Teaching with primary historical sources: Should it go mainstream? Can it? In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 1-8). Washington, D. C.: Mathematical Association of America.
- Siu, F. K., & Siu M. K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education, *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, **10**(4), 561-567.
- Siu, M. K. (1977). Mathematics for math-haters. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, **8** (1), 17-21.
- Siu, M. K. (1985). {History of [(mathematics)] teachers}. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques*, **354**, 309-319.
- Siu, M. K. (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's Commentary on JIU ZHANG SUAN SHU. *Educational Studies in Mathematics*, **24** (4), 345-357.
- Siu, M. K. (1995b) Mathematics education in ancient China: What lesson do we learn from it? *Historia Scientiarum*, **4** (3), 223-232.
- Siu, M. K. (2000). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. (Original work published 1997) In V. Katz (Ed.), *Using History To Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 3-9). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
- Siu, M. K. (2004). Official curriculum in mathematics in ancient China; How did candidates study for the examination? In J. Cai, L. Fan, S. Li, & N. Y. Wong (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 157-185). Singapore : World Scientific [Chinese translation published 2005 in 《華人如何學習數學》 (pp. 131-150). Nanjing: Jiangsu Educational Press.]
- Siu, M. K. (2006). "No, I don't use history of mathematics in my class. Why?" In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM2004 & ESU4 at Uppsala, July 2004* (pp. 268-277). Uppsala: Uppsala Universitet.[Chinese translation published 2009 in 蕭文強 (2009a) pp.120-135.]

- Siu, M. K. (2008). Proof as a practice of mathematical pursuit in a cultural, socio-political and intellectual context. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – The International Journal of Mathematics Education)*, 40 (3), 355-361.
- Siu, M. K. (2009b). Mathematics education in East Asia from antiquity to modern times. In K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, & G. Schubring (Eds.), *Dig where you stand: Proceedings of a conference on on-going research in the history of mathematics education, Garðabær, June 20-24, 2009* (pp. 197-208). Reykjavik: University of Iceland.
- Siu, M. K. (2011). Harmonies in Nature: A dialogue between mathematics and physics.(Original work published 2008) In V. Katz, & C. Tzanakis (Eds), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 83-90). Washington, D. C.: Mathematical Association of America.
- Siu, M. K. (2012). Proof in the Western and Eastern traditions: Implications for mathematics education. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (pp. 431-440). Heidelberg/NewYork: Springer Verlag.
- Siu, M. K., & Tzanakis, C. (2004). History of mathematics in classroom teaching—Appetizer? Main course? Or dessert? *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3 (1-2), v-x.
- Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B., & Katz, V. (Eds.) (1995). *Learn from the masters! Proceedings of the Kristiansand conference on history of mathematics and its place in teaching, August 1988*. Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Troy, W. (2006). Learning mathematics without culture or history in Bangladesh: What we can learn from developing countries. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM2004 & ESU4 at Uppsala, July 2004* (pp. 501-506). Uppsala : Uppsala Universitet.
- Watkins, D. A., & Biggs, J. B. (Eds.). (1996). *The Chinese learner: Cultural, psychological and contextual influence*. Hong Kong and Melbourne: CERC and ACER.
- Watkins, D. A., & Biggs, J. B. (Eds.). (2001). *Teaching the Chinese learner: Psychological and pedagogical perspectives*. Hong Kong and Melbourne: CERC and ACER.