

數學史與數學教學住宿工作坊

Workshop on History of Mathematics (Residential)

一九九九年七月四至五日

主講：蕭文強教授

香港大學數學系



香港科技大學
教育發展組



香港教育署
數學組

前言

這本小冊子和內附的視像影碟記錄了在一九九九年夏天，在科技大學專為中學數學教師舉辦的，數學史工作坊的主要內容及一些參考文獻。科技大學教育發展組和教育署輔導視學處數學及電腦組，有幸邀得香港大學的蕭文強教授主講了一個為期兩天的數學史住宿工作坊，參與留宿的老師有多達四十人，而前來旁聽的也有好幾十人；我們除了有蕭教授主講數學史外，還邀得中文大學大教育學院的黃毅英教授，黃家鳴先生，香港大學的郭禮賢先生，香港教育學院的馮振業先生，數理教育學會的梁子傑老師參與並給予講座，教育署輔導視學署數學及電腦組的曾健華先生、衛國強先生、李栢良先生和羅漢輝先生給與我們很多支持和幫忙。而策劃是次工作坊的列志佳老師為這事花了不少心思，可以說如果沒有他的幫助，這工作坊是不可能舉辦成功的。列老師作為前線教育工作者很清楚老師們在中學教授數學時的困難，並深深體會到知道多些數學歷史知識，無論對老師教學能力的提高或是對提高同學學習數學的興趣，都有莫大裨益；於是毅然挑起了舉辦整個工作坊的籌備和策劃的重擔。列老師還在科技大學理學院制作了一個便於參考的數學史網頁，網址是<http://www.edp.ust.hk/math/>，歡迎有興趣的同工流覽。

江海生老師和鄭永昌老師在百忙中抽出時間，為我們編寫蕭教授講座內容的簡介，我們對他們的幫忙表示謝意。雖然是次工作坊的全部費用是由大學教育資助委員會的教育基金支付，但是出版工作坊的書籍的經費均是由教育署承擔的，而數學組的關兆錦先生和李栢良先生給予我們很多鼓勵和幫助。我們因為別的事務繁忙而無暇整理這次工作坊其餘講者的講座，一並收入此文集，實為可惜，還請他們見諒。我們在這代表科技大學教育發展組的所有工作人員，對以上為香港教育界出力的同工和蕭文強教授致謝。

最後我們感謝《數學傳播》讓我們轉載蕭教授在該刊物上發表的一篇文章。

鄭紹遠，蔣翼邁
科技大學
教育發展組
二零零一年二月

目錄

前言	ii
講者名單及日程	iv
講座一(七月四日) 誰需要數學史? 頭盤、主菜、還是甜品?	iv
(視像碟一) Appetizer, main course or dessert?	
講座二(七月四日) 比例理論—難易之間?	iv
(視像碟二) On the theory of proportion - Easy or difficult?	
講座三(七月五日) 函數的概念一定義何價?	v
(視像碟三) Concept of function - What is in a name?	
講座四(七月五日) 數學史與數學思維—就有道而正焉!	v
(視像碟四) History of mathematics and mathematical thinking - Learn from the masters!	
講座一摘要	1
講座二摘要	3
講座三摘要	5
講座四摘要	7
附錄一: 數學史和數學教育:個人的經驗和看法	9
(轉載自《數學傳播》第十六卷3期,總63期(1992),23-29頁)	
附錄二: 參考文獻	14

第一講：誰需要數學史？頭盤、主菜、還是甜品？

(摘要)

蕭教授首先引用歷代知名數學家的說話逐步帶出對數學史的不同評價及數學史的不同定義。數學其實是人類文化的一部份。透過數學史，我們不單可以更成熟地去理解及欣賞到數學的精妙及美麗之處，並能從中得到啟發，由此而創造出新的數學；同時我們亦可以透過數學史去理解人類或某國家的文化發展。

在這個講座中，蕭教授從反面提出十五個假想問題模擬一般老師為何不願在數學課堂中教授數學史，從即場調查出來的結果，差不多都是同一個答案，就是大家都滿同意數學史對理解數學是有用及重要的（當然如此，否則他們亦不會參加這個工作坊！），但大部份教師因為從未或很少接受過這方面的訓練，不知如何去運用數學史。某程度上，這確實帶出了要否在大學數學系 加強本科生在這方面訓練的問題。

接著，蕭教授提出了一些運用數學史時需要小心的地方，不要以為數學史乃萬應靈丹。其實目的是把數學教好，方法不只一種，運用數學史只是其中一種方法，為教師多提供一項資源。數學史運用得宜便有如蕭教授所說，把愛麗絲夢遊仙境中留在樹梢上的柴郡貓兒笑容後面的主人家『那貓兒』抓回來；要是運用不宜，不但不能藉此使學生對數學有更深入的理解，反而使學生覺得數學課更困難更沉悶。

最後，蕭教授為這個講座作出了總結；數學史究竟是頭盤、主菜、還是甜品？這問題，其實很視乎對象而言。對低年級的同學來說，數學史的作用較似是頭盤或甜品；但對高中或大學的同學來說，數學史的作用可以更多成為主菜。

參考文獻

- 蕭文強，數學史和數學教育：個人的經驗和看法，數學傳播，16 (1992)，23-29.
- M.K. Siu, The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom, *Bulletin of the Hong Kong Mathematical Society*, 1 (1997), 143-154; also in p.3-9, *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, edited by V. Katz, Mathematical Association of America, 2000.

第二講：比例理論—難易之間？

(摘要)

在這一講中，蕭教授提出我們從小學便開始碰到比例，因為它的應用甚廣。例如貨幣的對換，或兩相似圖形對應邊的長度，都逃不了比例理論。但比例理論是非是一個容易的課題。對小學生、中學生及大學生而言，都不容易。我們以為它容易，是因為我們每次在應用比例理論時都假設了要用來作比例的東西或邊長，都是可公度的量(即兩個量之間的比例是一個有理數)。可是不可公度的量(即兩個量之間的比例不是一個有理數)，卻彼彼皆是。任意一個正方形的邊長與其對角線之比例，已是一個不可公度的量。其實古代的中國數學家，也十分重視比例的計算及理論，他們沒有發現不可公度的量這個現象，只在於當時他們的計算能力已很強，可以算到小數後很多個位(及太重視數學的實用性！)。

蕭教授介紹了Eudoxus如何解決(相傳由Hippasus指出)不可公度的量引起的一直為眾多數學史家強調的所謂數學危機。當今兩位數學史家W.R. Knorr及D. Fowler提出另一種見解。他們發現當時的人已利用輾轉相除法(相當於用今天連分數方法)去處理那問題，故不可公度的量這個問題，並不限於傳統數學史家所言。當時的數學界曾經嘗試建立一套基於輾轉相除法的理論去處理不可公度的量，但沒有成功。但更有趣的是，不可公度的量這問題引起了不少後世數學家的關注。而Eudoxus對這問題的解決方法，為日後Dedekind替無理數建立的理論，奠定了重要的基礎及方向。

藉著這個例子，蕭教授亦帶出幾個值得我們思考的問題：運用數學史是否一定要完全忠於那段歷史發展才有意思？我們又如何知道那段歷史發展的真相？若無法知道那段歷史的真相，那段歷史是否就不能運用？正如歷史學家R.G. Collingwood所言，其實歷史學家在重建一段歷史的過程中，已混入了主觀成份，他盡力企圖評論及詮釋尋找得來的資料及證據，重演那段歷史。所以歷史的價值在於它是一種思想的表現！

參考文獻

- 李繼閔，《九章算術》及其劉徽註研究，陝西人民教育出版社，1990，第3章；(繁體字本)九章出版社，1992。
- D. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*, Clarendon Press, 1987; 2nd edition, 1999.

第三講：函數的概念—定義何價？

(摘要)

數學家Felix Klein曾經說過數學的中心概念就是函數。由此可知函數在數學上佔有的地位是何等重要。很可惜大多數的中學生，或大學生，甚至一些准教師，對函數的概念，卻常常是不清不楚，實不容忽視，因為教師的學科知識不足時，有可能會導致以下三個問題：

- (一) 沒有足夠的基礎去持續進修；
- (二) 過份強調某些局限了的知識，因為他們所知道的就只有那一點點；
- (三) 看不到某些資料與他要教授的知識之間的連帶關係。

究竟問題出在那 ？

蕭教授認為函數其實是一個內容很豐富的課題。我們可以把函數看成是一種規律、或是一種法則與算法、或是用來比較數學的結構、或是某種數學結構的元素這四個層面去理解它。而函數的表示方式及作用也有多種。例如：公式、法則、自變量與應變量之間的依賴關係、有序偶(ordered pair)、列表(table)或圖像等。每種表示方式都有它的功用，但也有它的局限與不足。老師們應培養學生在函數的不同表示方式間來去自如的本領，從而捕捉到函數的所有神髓！

接著蕭教授以豐富及生動的素材，從動態與靜態的不斷交錯的歷史發展關係，交代了為何函數會有那麼多形式的表示。原來Function的原意是『要去做一些東西』(to perform or to execute)的意思；而中文『函數』這個名詞，其實是翻譯自十八世紀一些數學家對函數下的定義，Contains a variable quantity之意。蕭教授這個講座最終想帶出兩個目標：

- (1) 一個數學概念的發展，並非單方面，而是多方面的。老師們應該帶領學生從多方面去看函數，而非單一地將函數看成是某一種的形式表示。
- (2) 既然我們已有那麼多歷史上的素材，我們是否可以在課程中作出一些設計，看看是否可以透過某些數學概念在歷史中的發展

過程，去了解學生在學習這些數學概念時所產生的障礙？是否可以藉此發現如何克服這些障礙的線索？

參考文獻

- G. Harel, E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, 1992.
- I. Kleiner, Evolution of the function concept: A brief survey, *College Mathematics Journal*, 20(1989), 282-300.
- M.K. Siu, Concept of function — Its history and teaching, in *Learn From the Masters! Proceedings of the Kristiansand Workshop on History of Mathematics, August 1988*, (eds.) F. Swetz et al, Mathematical Association of America, 1995, 105-121.

思考問題

- 試把Bernoulli (1718)，Goursat (1923) 和 Suppes (1960) 給函數這個概念下的定義作一比較。
- 在你的心目中，函數是個怎麼樣的東西呢？你如何理解它？

第四講：數學史與數學思維—就有道而正焉！

(摘要)

蕭教授在這一講中，給我們做了一次完整的示範：如何利用歷史文獻學習數學思維的方法。蕭教授引用歐拉一七三五年的七橋問題文章使我們親身經歷一次大師級數學家的思維過程。(特別提到，不是所有大師都是那麼平易近人的。歐拉正好是一位願意花心思讓自己的思維呈現給大家的一位大師，令後世的人讀了他的文章而獲益。這也是蕭教授選取歐拉的文章作為這一講的原因。)

蕭教授把歐拉的重要思維環節逐一分析，讓我們學習到歐拉如何治學及如何思維。其內容包括：一、從歐拉穿梭於問題的一般性及特殊性的過程，使我們學習它們之間相輔相成的關係。二、歐拉希望用一些好的記號，而好的記號可以同時包含定義及概念。這對解決數學問題非常有幫助。三、歐拉把問題變成數學模型(問題變換)。四、將大問題分成子問題，再從子問題來解決原問題。蕭教授用十六個字形容這一個過程。就是『化繁為簡，以簡御繁；化整為零，從零復整，』。五、歐拉進一步思索更一般的問題的答案。六、歐拉到此並未滿足。他企圖尋找一些更簡捷的方法，使我們學習『精益求精』的治學態度。歐拉了不起的地方，就是詳細地記下這個思考過程。換了很多別的人，大概只把那個既簡單又容易的方法寫下來便算了。七、最後歐拉將實際構作也告訴我們，也即是講明了存在性之後，他把構作性的答案也寫下來。歐拉把整個問題從實際問題開始，一步一步記下他的思維過程，直至結束，完完全全的寫下來，使我們得以從中學習到大師的治學及思維方法，獲益良多。

參考文獻

- N.L. Biggs, E.K. Lloyd, R.J. Wilson, *Graph Theory*, 1736-1936, Clarendon Press, 1976, Chapter 1.
- M.K. Siu, Mathematical thinking and history of mathematics, in *Learn From the Masters! Proceedings of the Kristiansand Workshop on History of Mathematics, August 1988*, (eds.) F. Swetz et al, Mathematical Association of America, 1995, 279-282.
- 蕭文強，數學證明，江蘇教育出版社，1989，第四章第1節。

思考問題

- 閱讀 Euler 的七橋問題文章，試把他的解答步驟逐一弄清楚。
- 試把 Euler 的解答和今天課本上慣見的證明作一比較。Euler 的文章蘊含了那些現代圖論的重要概念？
- Euler 的文章對數學思考方法有何啟迪？