抖 擻 17
一九七六年九月

這是我談論數學史與數學教學的第一篇文章，組織上有些散漫。二十年後重讀此文，對一些論點的看法容或不盡同，但基調是沒有太大改變的。更高興者，二十年前有「孤軍作戰」之嘆，今天結識到不少「好此道者」！

蕭文強 1997.06.06

數學發展史給我們的啓發

蕭 文 强*

引言：學習一點數學發展史有什麼好處？

數學這門學科，少說也有四五千年的歷史，要是連雛形的上古時期數學也算在內，就更有一萬多年了。要有系統地把從古至今的數學發展作一個全面性的介紹，既非篇幅所容許，亦非筆者能力所能勝任。在這裏希望做到的，只是抽取其中一些例子，以說明數學發展史給予我們的啓發。這些只可以說是個人的一點體會，也很可能是人云亦云，最希望的是能够藉此引起更深入的討論。

首先不妨先談談，爲什麼學習一點數學發展史有助於學習數學？這個問題與“爲什麼要學習歷史”是分不開的，數學畢竟也是人類文化的一部份。但除此之外，數學具有它的特殊性質使到學習它的發展史更饒有意義。數學是一門累積起來的學科，它的過去將永遠融會於它的現在以至未來當中，只不過因時而異地用上了不同的語言或者不同的架構，又或者從個別特殊情形歸結到更一般的理論上。所以，數學發展是一脈相承，無分古今。有些人喜歡把數學分成“新數”、“舊數”、“摩登數”、“傳統數”，那不單是牽强的劃分，甚至有不良影響。若硬要劃分，不如就分爲“好的數學”與“不好的數學”，前者將流傳下去，而後者將隨時光流徙而被遺忘。

在動物學上有句話，說“胚胎發育是種系發~~生~~育的重演”，意思是說一種生物的個體發育過程，在某個程度上反映了它們祖先的進化歷史。好比方青蛙是由某種魚類進化而來，所以它們把卵產在水中，孵出的幼體也在水中生活，而成體却在陸地生活，但由於陸地生活的適應還不十分完善，所以生活在潮濕近水的地方。這句話用於數學上也很有意思，我們在學習數學的過程當中，或多或少地反映了我們祖先摸索探討的過程。法國數學家 *Poincaré* 甚至這樣說過：“動物學家認爲，動物胚胎的發育還在短暫的期間內，經過其祖先演化過程的一切地質~~地~~年代，而重演其歷史。看來，思維的發展亦復如此。教育工作者的任務，就是要使兒童思想的發展，踏過前人的足跡，迅速地走過某些階段，但毫不遺漏。科學史應當是這項工作的指南。”

---

* 蕭文强博士，任教於香港大學數學系。

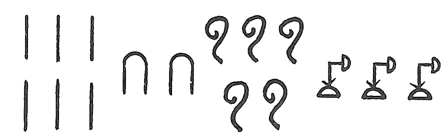
數學是怎樣產生的？

數學發展史與歷史發展既是分不開，兩者之間便有一定的關連，互相影響。關於這方面的探討，將會是一件有意思、有趣味的工作，但同時也要求辛勤的勞動，更要求對數學、對歷史有深切的認識。這顯然不是一個人可以担當得來的工作，在這裏只好從略。不過有一個基本的問題，却不能不提，那就是“數學是怎樣產生的？”

數與形的概念，在人類最初的思維中不容易形成，必須經過悠久遞變才逐漸形成。數的感覺萌芽於覺察多寡的能力，初民對於數的多寡的認識由模糊而漸加以充實，終於形成一個整齊的概念，這大概是數學史上最早的“抽象化”例子！人們日常生活中需要計數的地方逐漸增多，用手指計算已感不足，就想到用別種東西來代替，於是有結繩、堆石，或者在木頭上、在骨頭上刻紋，這與我們今天常提到的“一一對應”概念實在沒有兩樣！對形的認識亦復如是，譬如走直線是最短的路程這回事，不少動物都本能地知道，要把土地圍起來，便有簡單幾何圖形的概念，看見日月便有圓的概念，看見樹木便有了垂直的概念，但靈活地運用這些知識作計算，却要等到距今約一萬年前的新石器時代。由舊石器時代踏入新石器時代，人類與自然的關係由被動趨於主動，開始建造比較堅固的房子定居，由漁獵轉爲從事耕作畜牧，製造各種器皿，改良了交通工具，開展了雛形的經濟交換，改進了語言的溝通。於是，爲了測量土地，計算倉窖容量，摸索天體循環與寒暑交替規律，製作天文曆法，分配生產品，建造房屋等等，人民對數學的認識逐步加深，數學便由此發展起來。

綜觀古代文明的數學，莫不與生產實踐有關。具代表性的史料，在古埃及有 *Rhind Papyrus* 和 *Moscow Papyrus*，在古巴比倫有數以百計的刻有楔形文字的泥板，在中國有《周髀算經》，與《九章算術》。因篇幅所限，沒有辦法逐一作詳細介紹了，但不妨舉一個有趣的例子，以說明古代人民碰到的困難和他們的智慧。因爲我們有十個指頭，所以自然地用了“十”做記數法的基礎，很多不同的民族都不約而同地採用了十進制。我們今天習用的地位制記數法却是經過一段漫長的日子才逐漸形成。我們對它是太熟習了，未必欣賞到它的重要性和它帶給計算上的方便。未有地位制之前，很多民族都採用組合制記數法，古埃及人就以不同的符號代表不同的數目，如

𓏺 代表一，𓎆 代表十，𓍢 代表百，𓆼 代表千，於是3526便記作



可以想象，用這種記數法去做加數還可以，用來做乘數却又困難又麻煩了。古埃及的人民想出了一個聰明的辦法，以加法（及兩倍法）完全替代了乘法。用今天的語言來說明，大概是這樣子：譬如問 5×36 是多少，他們便寫下兩行，每一行的數值

是上一行的兩倍，

$$\begin{array}{rr} *1 & 36 \\ 2 & 72 \\ *4 & 144, \end{array}$$

把有星號的數項相加，便得出答案 180（因爲 $1+4=5$）。爲什麼這個辦法總是行得通呢？如果仔細看清楚，它不外是利用了二進制的原理，無論什麼正整數總可以唯一地表示爲二的乘冪的和。用今天的二進制表示式寫出來，道理就更清楚了（兩倍法這個運算，用二進制表示，只不過是向左移一位，再在後面補個零）。譬如上面例子，5 是 101，36 是 100100，所以那兩行是相當於

$$\begin{array}{lrl} 1 & 100100 & \\ 0 & 1001000 & + = 10110100 \\ 1 & 10010000 & \end{array}$$

轉回到十進制，10110100 即是 180。原來我們在今天認爲是最“時髦”的電腦計算，早在五千年前便已經有了！

數學產生的主要原因是爲了生產勞動，爲了認識外部世界。這方面的例子多不勝舉，其中較具代表性的是微積分的發展經過。與微積分有關的基本概念，例如無限小量、極限、求積等等，早在公元前三世紀便有被提及。在中國，公孫龍子早便提到“一尺之棰，日取其半，萬世不竭”。在古希臘 *Archimedes* 運用“窮舉法”計算了某些幾何圖形的面積。在中國東漢時劉徽提出的“割圓術”，說到：“割之彌細，所失彌少，割之又割，以至不可割，則與圓周合體而無所失矣。”到了南北朝，又有祖冲之、祖恒父子求圓周率的值，得出極富數學意義的 22/7 爲“約率”，355/113 爲“密率”。他們也利用一個異常巧妙的方法計算了球體的體積，他們應用的原理，在西方叫做 *Cavalieri* 原理，是意大利數學家在1630年左右發現的。

既然有了這樣長久的歷史，爲什麼要等到十七世紀中葉而後才由 *Newton* 與 *Leibniz* 總結前人的經驗，有系統地開拓了微積分這一個重要的數學分支呢？固然，其中一個主要原因是在十七世紀初期 *Descartes* 確立了變數這個重要概念，並且在他的著述《幾何》裏提出把代數與幾何揉合在一起的新穎觀點。（很多人以爲這是近世解析幾何的第一本書，那是不確的。那時候座標軸這個東西也沒有出現，遑論各種曲線的方程了。只可以說它在精神上導致了解析幾何的發展，反而在差不多同樣時候，由另一個法國數學家 *Fermat* 提出的軌跡理論，與我們今天在教科書上見到的解析幾何是更爲相似。）但爲什麼十七世紀這段時期在數學史上是如此輝煌的一頁呢？除却歷史上，社會發展上和數學上有它一定的原因，有一個主要的因素便是實踐上的需求。十七世紀歐洲的生產力有很大發展，大量的生產技術問題，如機械工業、航海、天文、建築等，都對數學提出了很多新的要求。

同時，我們也可以看出，數學發展是集體智慧的結晶，並非一朝一夕間由某幾個“天才”創造出來的。我們常會聽到 *Archimedes* 赤條條由浴盆跳出來大嚷 *eureka*，或

者 *Newton* 坐在樹下被萍果打痛了腦袋這一類的故事。這些只宜用作茶餘飯後的趣談，却不宜用作解釋數學發展的經過。有些人喜歡把數學發展史看成是某幾個人創造出來的歷史，就好像沒有了 *Euclid* 就不會有幾何，沒有了 *Newton, Leibniz* 就不會有微積分，沒有了 *Einstein* 就不會有相對論。其實，在數學史上已經不只一次有過這樣的例子，不同的人在差不多同樣時期發現相同的理論，或者隔了幾百年後有人獨立地發現前人搞過的理論。由此可見突破性的成就是有它一定的醞釀時期。某些突破成果的確是由個別數學家得出，但爲什麼他們會得出那些成果呢？若單以“他們是天才”去作解釋，未免是片面地把事情簡化了。*Newton* 自己也曾說過：“倘若我比別人看得更遠一些，那是我站在巨人肩膊之上。”

數學是怎樣提升到抽象階段？

數學既由實踐而來，那爲什麼又會提昇到抽象階段呢？

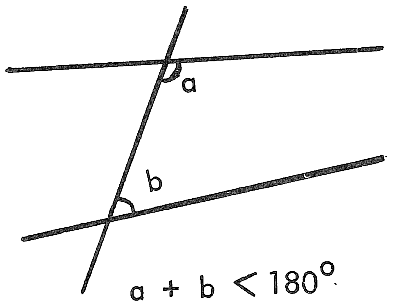
不如看一個例子，就是幾何學的發展史。上面已經說過，最早期的“本能的幾何”只是人們對形象的直觀認識，後來爲了實際需求，便對幾何圖形有進一步的研究。幾何的英文詞 *geometry* 是由希臘文演變來的，由兩個希臘詞組成，*geo* 表示地，*metron* 表示量，合起來就是“量地學”。據古希臘的歷史學家 *Herodotus* 的話，在古埃及每當尼羅河氾濫後，人民便需要測量土地以重新估定賦稅，幾何學即由此發展起來。總括而言，那都可以說是感性認識，但如果要更加了解更加活用這些知識，就必須由感性認識跳躍到理性認識了，在數學史上這是漫長的一頁。古文明的數學只著重問：“怎樣做？”到了公元前六世紀的希臘數學，才開始著重問：“爲什麼這樣做是對的？”

最早帶有邏輯意味的幾何結果見諸 *Thales* 的著述，比如他指出直徑所對應的圓周角是個直角，等腰三角形的底角相等之類。後來又經過 *Pythagoras* 等人的研究，累積了更多的幾何知識。（應該在這兒順帶一提的，是歷史上未必真的有過 *Thales* 或者 *Pythagoras*，與其說有過這樣的一個人提出這樣的理論，不如說有過這樣的一班人提出這樣的理論。公元前六世紀的史料記載，因年代久遠未必是盡可信的。）這些前人果實，終於融會於公元前三世紀 *Euclid* 的著述《幾何原本》裏。這本書的內容很多都是已知的結果，*Euclid* 是把它們整理成爲一套有系統的理論，有條理地把它們闡述。但這本書在數學史上起的作用，却遠超乎單單這一方面，更重要的是它顯示了數學上所謂“演繹”的這個精神。*Euclid* 由一些基本定義與十條公理出發，推論出四百六十五條定理來。有人喜歡把《幾何原本》看成是開近世數學公理化的先河，其實若以今天尺度去量，*Euclid* 的公理系統是存在着不少漏洞的，在他的證明當中，往往用了額外的假設而不自知。然而這無損於《幾何原本》的重要性，最低限度這說明了一件事：有些人喜歡常掛在嘴邊的“嚴謹性”並非是一成不變的。今天的“嚴謹”，明天也許被視爲“欺騙”！有位數學家（忘了是誰）說得好：“所謂‘嚴謹’，只是迄當天的程度爲止。”

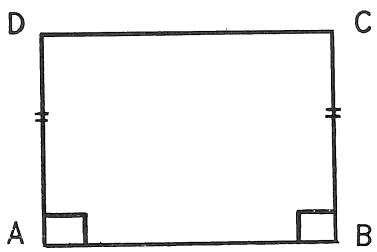
數學是否“眞理”？

幾何學繼續的發展，也是相當富啓發性的。

從很早的時候起，不少人對《幾何原本》裏面的一條公理便感覺到不舒服，那就是有名的“第五公理”：若一直線與另兩直線相交，而且與它們在一邊所成的內角和小於兩個直角，則當那兩條直線作無限延長時，必在線的那邊相交。（看下圖）



人們對它感到不舒服，並非是不相信它的“眞實性”（請記得當時的幾何仍然以直觀認識爲主），而是覺得它比其他公理贅繁得多，看似是條定理多於公理，尤其是它的逆命題根本就是《幾何原本》裏面的第十七條定理：三角形任意兩內角和必小於兩個直角。說來有趣，頭一個對這個公理感到不滿意的很可能就是 *Euclid* 本人！他企圖盡可能拖延這個公理的出現，直到要證明第二十九條定理，即是平行線內錯角相等，才第一回不得不用到它。自此以後的二千年當中，不少人埋首於這個問題，或者嘗試由其他公理推出“第五公理”，或者嘗試提出另一個更顯淺的公理去替代它。然而他們的努力都失敗了，若非證明中不自覺地用了與“第五公理”有關的結果，便是提出的公理與“第五公理”是邏輯等價的。這一連串的失敗却爲後來的成功鋪路，其中最有意思的是意大利數學家 *Saccheri* 的嘗試。在 *1730* 年左右他寫了一本書，叫做《除去 *Euclid* 的瑕疵》，在裏面提出這樣的想法。考慮如下圖所示的四邊形 $ABCD$，其中 A 角和 B 角都是直角，而且 $AD=BC$。不難證明 C 角 $=D$ 角（不需要用到“第五公理”），因此有三個可能性：



① C角 $=D$角小於一個直角，② C角 $=D$ 角等於一個直角，③C角 $=D$角大於一個直角。由②是可以推出“第五公理”的，所以 *Saccheri* 便設法證明①，③是不可能成立的。利用歐氏幾何的其他公理，他有辦法排除了③的可能性，但就是找不出可以否定①的理由。可惜他太熱衷於除去 *Euclid* 的“瑕疵”，否則非歐幾何學那時便誕生，不必再多等一百年了！結果他用模模糊糊的論據否定了①，自以爲證明了“第五公理”。

事實上，“第五公理”是邏輯獨立於其他公理之外，意思是說，即使把它換成自身的否定，也一點不影響到整個公理系統的無矛盾性。要說得明白點，不如轉看一個與“第五公理”是邏輯等價的 *Playfair* 公理：通過一條直線外的一點最多只有一條與那條線是平行的直線。（由歐氏幾何其他公理，是可以推出必定有這樣的一條平行線，基本上那就是第廿七條定理的內容：若一直線與另兩線相交而所成的內錯角相等，則那兩條線是平行的。）在十九世紀之前，很少有人想過是否有可能存在着

多於一條這樣的平行線？到了 *1830* 年左右，匈牙利數學家 *Bolyai* 把“第五公理”換成它自身的否定，假設通過一點有至少兩條這樣的平行線，由此建立起另一套完整無矛盾的幾何學來。差不多同樣時期，俄國數學家 *Lobachevsky* 也發表了相似的理論，這就是數學史上第一個非歐幾何學的例子了。固然，在這套幾何學裏，有不少結果是令人難以置信的，因爲與直觀太不符了。譬如說三角形內角和必小於兩個直角，而且當三角形面積越大時，內角和便越小，但三角形的面積却又不能任意大，而且相似的三角形必全等！

爲了說明歐氏幾何與非歐幾何的關係，不妨打個譬喻。有座房子由五根支柱撐着，把其中一根支柱抽掉，當然有一部份建築要倒下來，但不一定整座房子便塌了。如今換上另一根支柱，只要是跟剩下來那部份建築沒有抵觸的話，我們是仍舊可以在上面建起另一座房子的。新的房子是包括了舊的一部份，但也多了與以前不同的一部份。

這個發展的經過說明了什麼呢？非歐幾何的發現有什麼價值？從應用上來說，非歐幾何亦非僅只“智力遊戲”而已。例如在 *1950* 年有位美國物理學家 *Luneberg* 提出雙目性視覺中的空間如果用 *Bolyai-Lobachevsky* 那套幾何去解釋，將更貼切。又例如德國數學家 *Riemann* 在 *1854* 年提出另一套非歐幾何學，爲 *Einstein* 的廣義相對論的時空概念提供了基礎觀點。不過，在十九世紀中葉的當時，非歐幾何的發現是具有更重大的意義，它揭示了數學的一個本質，即是“數學非眞理”。十八世紀德國哲學家 *Kant* 認爲歐幾里德空間這個概念已存在於我們意識之中，也只有這種幾何才是“眞”的幾何。事實上，無所謂“眞”或“不眞”的幾何，只有“適合”或“不適合”的幾何。數學並非要求“眞”，它只能指出在什麼假設底下可以得出什麼結論。至於要考慮什麼樣的假設，那才是關鍵，是與實踐需求及與外部世界經驗分割不開的。或者可以這樣說，數學發展通常由“歸納”出發，然後才轉爲“演繹”，而在這段過程中，兩者相輔相成。

非歐幾何學的發現，也說明了“破除迷信”的重要性。在 *Bolyai* 和 *Lobachevsky* 之前，人們過份信服權威，依循傳統，不敢闖新路，*Saccheri* 的故事就是一個教訓。其實，早在 *1794* 年左右 *Gauss* 已經有了非歐幾何學的擬想，還在這方面取得了不少結果。很可惜 *Gauss* 雖然具備了學術上的勇氣去闖出這條新路，却就缺乏了精神上的勇氣去面對因這發現引起的爭論甚至嘲笑。所以他從不把這些結果發表，直到 *Bolyai* 的父親把兒子的成績告訴他知道的時候，他才在信上提及這一回事。*Gauss* 可算是近代最出色的數學家之一，尚且如此，可見當時歐氏幾何的傳統思想是如何牢固地統治着數學界了。要從傳統思想中解放出來，是多麼困難的一回事。

數學發展史對數學有什麼啓發？

數學既由生產實踐而來，那麼在教學當中我們是否有責任多留心實際的例子，好叫學生也能够體會到這一點呢？舉一個簡單的例子，三角形全等的三邊定理，解

釋了三角形的穩定性，所以很多支架都採用三角形結構就是這個緣故。再舉另一個簡單的例子，對應於直角圓周角的弦是直徑這個定理，解釋了如何用曲尺去求圓心。又例如講到不等式或者圖解法時，也可以適當地插入一些簡單的線性規劃問題。在高等數學裏是有更多應用的例子，且不限於理工方面，要是備課時留心一下；是可以找到的。

數學的發展，尤其在近世應用這方面，都着眼於怎樣建立一個數學模型。所謂模型，就是把實際問題翻譯成數學語言，而且在這個過程當中，把實際情形"理想化"了，以便易於用適當的數學方法處理分析。固然，這樣得出來的只是一個粗略近似的答案，還需要逐步改善模型，由簡至繁，一步步地接近實際情形。模型越是複雜，數學上的困難也就越大，新的數學方法，新的數學理論也是由此而生。這種思想的最樸素形式，在"點"與"線"的概念中已經可以見到，到了用微分方程去解决力學問題的時候就顯得更清楚了。近世數學應用已不限於理工科方面，生物、醫學甚至社會科學都用上了數學。應該强調一點，建立模型只能求出近似答案，沒有求出與實際情形是絲毫不差的精確答案。可惜在教學當中（特別是在中學數學教學當中），少有强調這一點，少有顧及如近似值計算，誤差估計，概率，統計可靠程度這一類的課題。不妨引用 *Einstein* 一句饒有意思的話："就數學定理之涉及實在來說，它們並無可靠性、必然性；就其可靠性與必然性來說，它們並不涉及實在。"

數學雖然是一門邏輯性極强的學科，但從數學發展史看得出，單是邏輯是不能導致新的發展，所謂"嚴謹"只不過是事後工夫。舉一個例子，數學分析經過兩個世紀的蓬勃發展，才引出十九世紀 *Cauchy*, *Weierstrass* 等人的嚴謹理論。現代德國數學家 *Weyl* 便曾這樣說過："邏輯乃數學家爲保持思想强健而遵守的衛生規則。"可見邏輯不能决定數學內容，反之數學內容决定它的邏輯結構。舉一個很簡單的例子，爲什麼分數相乘要定爲$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$而分數相加却不定爲$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$呢？又或者，爲什麼兩個矩陣相乘要定義得這麼古怪，要是逐項相乘豈非更乾脆利落？在教學方面，一開始便用公理出發，雖然收到整潔精簡的效果，但同時也就失掉啓發動機，而且也歪曲了數學發展的本來面目。難怪不少學生以爲數學只是一套"華而不實"的理論，而對數學根本興趣不大的，更連"華"這一點也看不出了。我們應該考慮一下，在教學當中過份强調邏輯嚴謹性，片面地集中於"演繹"這方面而忽略了富啓發性的"歸納"這一方面，對學生來說，是有益呢抑或是有害？

同時，在數學教學中容易給學生一個印象，搞數學是小小心心逐步去做，每做一步都要細察是否符合邏輯要求。固然，小心是需要的，有些較微妙的地方一不細心易生嚴重錯誤，這情形尤以在高等數學爲甚。但同時做數學也有它大胆的一面，很多時憑着直觀經驗臆測，有時更會暫時丢開邏輯放手去幹，做完了才回頭細察。在數學史上有不少這樣的例子，尤以十八世紀那時爲甚，而那時又以 *Euler* 爲甚。

當然他也犯過錯誤，例如沒有小心地運用二項式展開$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots$而得出（當$x=2$）$1+2+2^2+\cdots\cdots=-1$這種滑稽的結果。但同時他也運用大胆富想像力的假設得出像$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$這種後來證實了是正確的結果。又例如在微積分發展的初期，人們通常分不開連續性與可微性，然而他們還是得出了一大堆有用的結果。法國數學家 *Picard* 甚至說："假如 *Newton* 和 *Leibniz* 知道有些連續函數是沒有導函數的話，也許便創造不出微積分！"在教學上是否應該想想，如何在不讓過份嚴謹而扼殺學生想像力以及不叫學生粗心大意而做出錯誤結果之中取出合理的平衡？

最後，回到"胚胎發育是種系發生的重演"這句話。有些概念是我們祖先摸索了好一段日子才掌握到的，有理由相信對初學者來說那會是個困難的課題。舉一個例子，從希臘文化最盛期算起，經過差不多一千年才有比較明確的"負數"概念（在《九章算術》裏便曾出現過），而再過一千年之後才廣被接納。可見"負數"這概念得來的不易，要初學者憑空去掌握是很困難的。尤其如果硬要他們把"-2"看成是"2"的加法逆元，局面當更形混亂了！