從一道競賽幾何題引發的群組討論

李文生
香港大學教育學院

蕭文強
香港大學數學系

月前我們其中一人收到南非友人 Michael de Villiers 寄來一道南非數學奧林匹克 2016 的幾何題，解答之餘，引發了好幾位數學教師以電郵往來討論。原來的幾何題雖然有趣但貌似十分「人工化」，在抽絲剝繭的探討過程中卻峰迴路轉，導致一些頗富教學興味的發現，不妨公諸同好。

原來的問題是這樣的：$ABCD$ 是個正方形，E 是邊 AD 上的一點，在 A 與 D 之間；F 是邊 CD 上的點，在 C 與 D 之間，而且 BF 平分 $\angle EBC$。若 $AE = 2$， $CF = 3$，求 EB。[原題是選擇題，有五個答案以供選擇。]（見圖 1a）

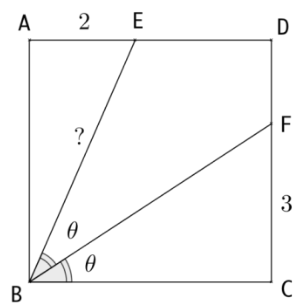


圖 1a

讀者不妨先想一想如何解答這道題目，不要立即讀下去。我們設計了一個 *GeoGebra* 應用程序 : https://ggbm.at/ff9zRqFA ，或者可以提供一點幫助。

喜歡思考數學的朋友碰到這道題目，首先想到的，是答案與方形的大小有沒有關係？有沒有更一般的解？ 於是，很自然地便假設 $AB = s$，$AE = a$，$CF = b$，試圖計算 EB，表為 s，a，b 的數式，看看 s 為何並不出現。把這道題目交給一位中學生，如果這位中學生懂得三角學而且數學能力又不差的話，很可能你會收到以下的解答：（見圖 1b）

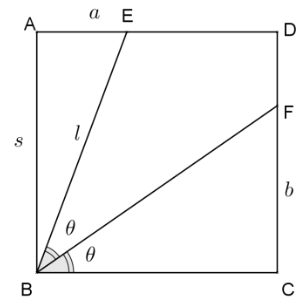


圖 1b

$a = s\ cot2\theta$，$b = s\ tan\theta$，$\angle EBF = \angle CBF = \theta$。

因為 $cot2\theta = \frac{1-t^2}{2t}$，$t = tan\theta$，故 $\frac{a}{s} = \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1-\left(\frac{b}{s}\right)^2}{2\left(\frac{b}{s}\right)} = \frac{s^2-b^2}{2bs}$，

即 $2abs = s^3 - sb^2$。由於$s \neq 0$，故 $2\text{ab} = s^2 - b^2$。

若 $EB = l$，則 $l^2 = a^2 + s^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$，

故 $EB = l = a + b = AE + CF$。

不喜歡運用 $tan\theta$，只喜歡運用 $sin\theta$ 和 $cos\theta$ 作計算的朋友，當然可以依循類似上述的計算得到解答，把 $tan\theta$ 換作 $\frac{sin\theta}{cos\theta}$ 即成，那可不是我們要繼續討論的要點。我們要討論的，是還有什麼別的途徑去解答問題。

有一位叫 Nicholas Kroon 的南非高中生在競賽中提出一個運用面積的計算，其中也用了三角學的知識，所以其實與上述解答是性質相似。他注意到 ΔBAE 、ΔBCF、ΔEDF 和 ΔEBF 的面積分別是 $\frac{sa}{2}$ 、$\frac{sb}{2}$ 、$\frac{(s-a)(s-b)}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{s^2+a^2}\sqrt{s^2+b^2}sin\theta}{2} = \frac{b\sqrt{s^2+a^2}}{2}$（因為 $sin\theta = \frac{b}{\sqrt{s^2+b^2}}$）。把這四項相加，得到方形 $ABCD$ 的面積，即是

$$s^2 = \left(\frac{sa}{2}\right) + \left(\frac{sb}{2}\right) + \frac{(s-a)(s-b)}{2} + \left(\frac{b\sqrt{s^2+a^2}}{2}\right),$$

即 $s^2 = b^2 + 2ab$，由此亦得到 $EB = AE + CF$。

在討論過程中，數學教師譚志良提出以下的計算，他不運用 $tan\theta$ ，卻運用了平分角的性質。從 E 構作垂線 EUV，與 BF 及 BC 分別交於 U 及 V（見圖 2），因為 BU 平分 $\angle EBV$，故 $EU : UV = l : a$，即 $EU : s = l : l + a$。由於三角形 ΔUBV 與 ΔFBC 相似，故 $UV : b = a : \text{s}$，即 $UV = \frac{ab}{s}$。$EU = s - UV = \frac{s^2-ab}{s}$ ，故 $\frac{s^2-ab}{s} = \frac{sl}{l+a}$，即 $s^2 = b(l+a)$。

已知 $s^2 = l^2 - a^2$ ，故 $l^2 = bl - a(a+b) = 0$。解二次方程得到 $l = a + b$ 或 $l = -a$，後者無可能，故 $l = a + b$，即 $EB = AE + CF$。

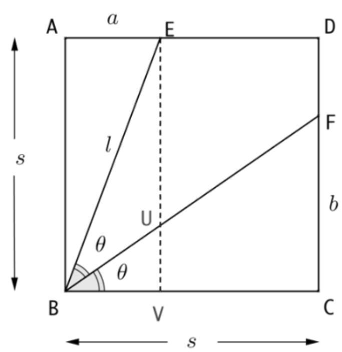


圖 2

把這個計算倒過來看，從 $EU = s - UV = s - \frac{ab}{s}$ 開始，得到

$$EU:UV = s^2 - ab : ab ，$$

便知道若 $l = a + b$，則 $EU:UV = l : a$。也就是說，BF 平分 $\angle EBC$ 這回事，是 $EB = AE + CF$ 的必要條件。按前一段所述，BF 平分 $\angle EBC$ 這回事，也是 $EB = AE + CF$ 的充份條件。

以上提及的幾個解答都基於計算，即 $l = a + b$。但一道幾何題是否應該有一個演繹幾何的解法呢？或者說，古代希臘人也可以看得明白的題目，他們如何解答呢？我們其中一人在上世紀五十年代後期上中學，與傳統歐氏幾何相處日久，碰到這道題目，自然想到用傳統歐氏幾何解答它。但更令他感興趣的，是為何有人想到擬這樣一道題，構作角平分線 BF，使 $EB = AE + CF$ 呢？

很自然地，讓我們在方形 $ABCD$ 的邊 AD 上取一點 E，在 A 與 D 之間。連直線 EB，在 EB 上截取 EG，使 $EG = AE$，再在 CD 上取一點 F，在 C 與 D 之間，使 $CF = BG$。能否判斷 F 在方形中有什麼幾何性質呢？既然 ΔAEG 是等腰三角形，自然想到構作 $\angle AEG$ 的角平分線，與 AG 垂直相交於 K，於是知道 $\angle AEK = \angle GEK = \angle BAG (= \theta)$。如果我們構作直線 BF 與 EK 平行，與 CD 相交於 F，便會得到 BF 是 $\angle EBC$ 的角平分線，而且 AG 延長與 BF 相交於 M，垂直於 BF。再從 C 構作 CN 垂直於 BF，與 BF 相交於 N，便得到若干個包含某一個角等於 θ 的直角三角形，例如 ΔABM 和 ΔBCN 等，故$BM = CN$。由此知道 ΔGBM 與 ΔFCN全等，故$BG = CF$，即是 $EB = EG + BG = AE + CF$。（見圖 3a）

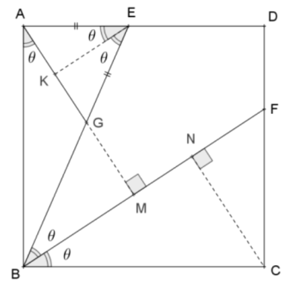


圖 3a

回顧一下，設 BF 是 $\angle EBC$ 的角平分線，構作 AGM 垂直於 BF，與 EB 及 BF 分別相交於 G 和 M；構作 CN 垂直於 BF，與 BF 相交於 N，便得到 ΔABM 和 ΔBCN全等，故 $BM = CN$，而且 ΔGBM 和 ΔFCN 全等，故$BG = CF$。由於$\angle EAG = \angle EGA = \frac{\pi}{2} - \theta$ ，故 $AE = EG$。因此，$EB = EG + BG = AE + CF$。[注意，如果 E 是在 AD 延長或 DA 延長上，類似的等式（經適當安排）依然成立。] 我們不單得到一個證明，只用上演繹幾何，同時也明白為何有這樣的結果：為何 BF 是 $\angle EBC$ 的角平分線？

讓我們進一步分析這個證明，其中 ΔGBM 與 ΔFCN 全等是關鍵的一步。若把 AGM 延長至 BC上的一點 X，也會得到一個與它們全等的 ΔXBM，並且可以想像為一個較簡潔的圖 (見圖 3b)。ΔAEG 和 ΔXBG 是兩個相似的等腰三角形，$AE = EG$，$XB = BG$。既然

$$XB = BG = EB - EG = EB - AE，$$

只要在 CD 截取 $CF = XB$，便得到 $EB = AE + CF$ 了; 那等於說，把直角三角形 ΔABX 逆時針方向旋轉一個直角至 ΔBCF（見圖 3c）。由於 $\angle CBF = \angle BAX = \theta$，$BF$ 與 AX 垂直相交，因此在等腰三角形ΔXBG 中，BF 平分$\angle GBX$，也就是說，BF 平分 $\angle EBC$。反過來說，若 BF 平分 $\angle EBC$，則

$$\angle BAX = \frac{\pi}{2} - \angle EAX = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}[\pi - 2\theta] = \theta，$$

故 ΔABX 與 ΔBCF 全等，得 $CF = BX$，即

$$EB = EG + BG = AE + XB = AE + BX = AE + CF。$$

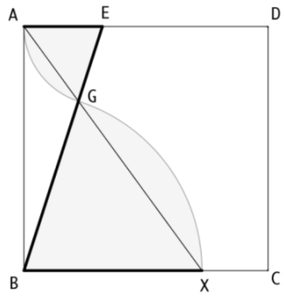


圖 3b

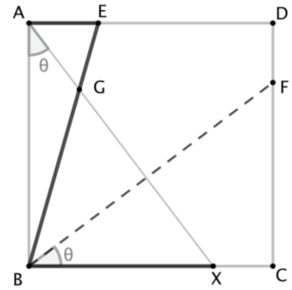


圖 3c

我們設計了一個 *GeoGebra* 應用程序：https://ggbm.at/kJh4FGuK，說明這回事。

同樣利用旋轉，我們可以把直角三角形 ΔBAE 繞著 B 順時針方向旋轉一個直角，變成是 $\Delta BCE'$，E' 在 DC 延長，$CE' = AE$（見圖 4）。由於

$$\angle E'FB = \angle E'BF = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

故 $E'B = E'F$。因此 $EB = E'B = E'F = CE' + CF = AE + CF$。

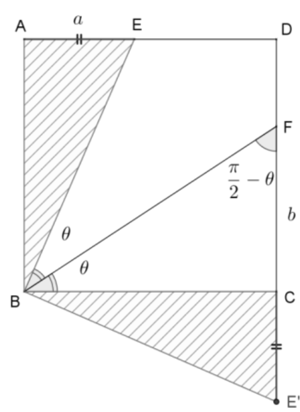


圖 4

[南非友人 Michael de Villiers 寄來的一篇文章：A multiple solution task : a SAMO Problem ，列舉了好幾個證明，此乃其中之一。見 http://dynamicmathematicslearning.com/SAMO-2016-R1Q20.pdf]

不過，仍然有一個疑團未解，就是為何要在方形 $ABCD$ 的邊 CD 上尋找一點 F，使 $EB = AE + CF$？有一天，有份參與討論的數學教師譚志良寫來一封電郵，他忽然記起多

年前在摺紙遊戲當中製作一個所謂「黃金矩形」的方法，即是矩形兩邊之比例是 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}):1$。這個摺紙方法如下圖所示（見圖 5）：

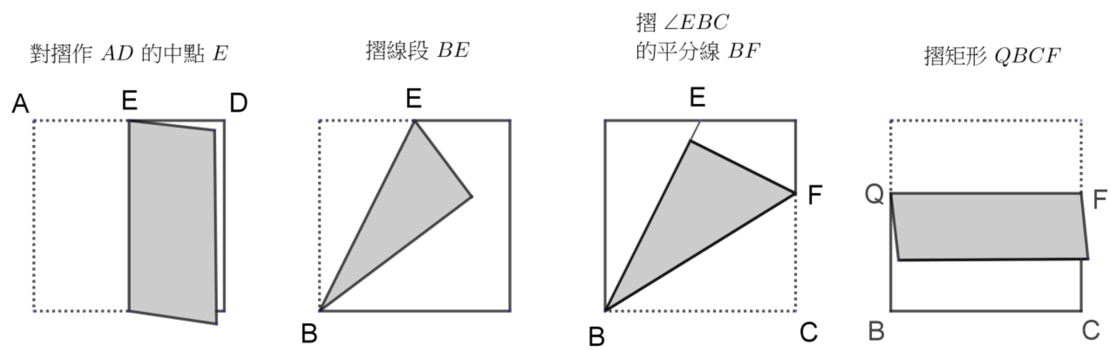


圖 5

其實，這個摺紙方法是這道幾何題的一個特殊情況，即是當 E 是 AD 的中點的情況，$AE=a=\frac{s}{2}$ ，$CF=b$。由於 $s^2=b^2+2ab$ ，故 $\frac{s}{b}$ 是 $X^2-X-1=0$ 的正根，也就是 $\frac{s}{b}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$。設有邊長是 2 的正方形 $ABCD$，E 是 AD 的中點。如果我們要在 CD 上尋找一點 F，使 $CB:CF=1+\sqrt{5}:2=2:\sqrt{5}-1$，等價於在 CD 上截取 CF，使

$$CF=\sqrt{5}-1=EB-AE,$$

即是使 $EB=AE+CF$（見圖 6）。黃金比例是數學上的重要課題，無怪乎我們嘗試以摺紙方法得到一個「黃金矩形」。為了製作一個「黃金矩形」，試圖在邊長是 2 的正方形的邊 CD 上截取 CF，使$EB=AE+CF$，不正就是那道幾何題要證明的事情嗎？

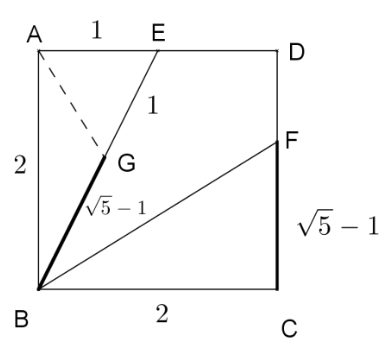


圖 6

至此一步，我們其中一位想起那個摺紙方法正是多年前他在課上向在職教師講述的例子。他也記起了當年偶然發現這個摺紙方法，回想起來，最初他只是隨意把玩一張方形紙，卻意外地察覺到所得矩形看似合乎黃金比例。印象中他未曾見過這個摺法，於是進一步驗證，最後驚喜地確認這是黃金比例，當時留下一個印象深刻的證明。（見圖 7）

在方形 $ABCD$ 内構作與 ΔBAE 全等的 ΔCBH（H 在 AB 上，在 A 與 B 之間），再構作 $\angle EBC$ 的角平分線，與 CD 相交於 F。如果 CH 與 BF 相交於 T，便知道

$$\angle HBT = \angle HTB = \angle CFT = \alpha + \theta，其中\ \angle ABE = \alpha，\angle EBF = \angle CBF = \theta。$$

因此， $HT = HB = AE$ ，$CT = CF$，故

$$EB = HC = HT + CT = AE + CF。$$

在證明中，E 是否 AD 的中點是無關宏旨，但如果 E 是 AD 的中點，便有

$$CB : CF = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) : 1\ 。$$

同時，這個證明也說明了為何 BF 平分$\angle EBC$ 這回事，是$EB = AE + CF$ 的必要條件，證明留給有興趣的讀者自行做出來。比較一下借助旋轉直角三角形 ΔBAE 的證明（見圖 4），這個想法其實是異曲同工！

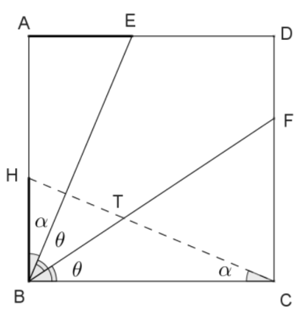
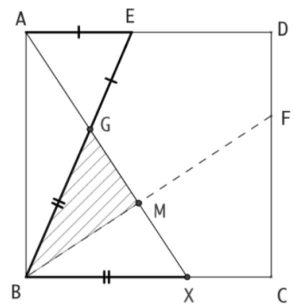


圖 7

餘音未了，讓我們再看看 圖 3a，把 AGM 延長，與 BC 相交於 X（見圖 8a）。由於 $EG = AE$，故$BG = BX$。我們之前已經知道 ΔGBM 與 ΔFCN全等，明顯地 ΔGBM與 ΔXBM 也全等，所以 ΔFCN 與 ΔXBM全等，故$CF = BX = BG$。固然，之前我們已經證明了這回事，有何稀奇？但把圖 8a 逆時針方向轉一個直角，便得到 圖 8b，那不正就是 圖 7 嗎？**[** 圖 8b 中的 A、B、C、D、E、X、G 分別是 圖 7 中的 B、C、D、A、H、F、T。**]** 我們設計了一個 *GeoGebra* 應用程序：https://ggbm.at/MpfRCA2W，以作顯示之用。



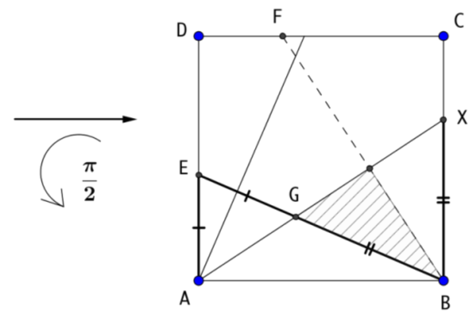
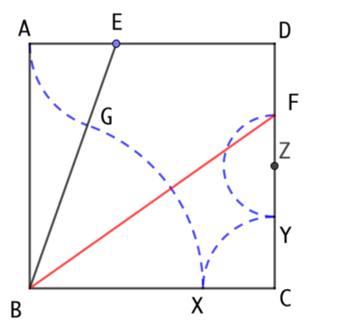
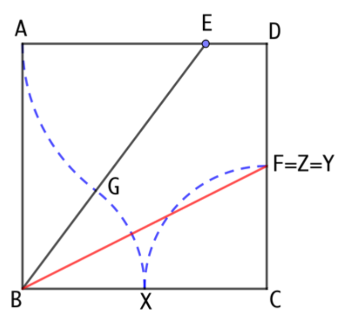


圖 8a　　　　　　　　　　圖 8b

這個視角 (見圖 3b) 也提供另一個構作方法，尋找邊 CD 上的一點 F，使 $EB = AE + CF$：

以 E 為中心、EA 為半徑構作一圓，與 EB 相交於 G；以 B 為中心、BG 為半徑構作一圓，與 BC 相交於 X；以 C 為中心、CX 為半徑構作一圓，與 CD 相交於 Y；以 CD 的中點 Z 為中心、ZY 為半徑構作一圓，與 CD 相交於 F（見圖 9a，b，c）。得 $EB = AE + CF$ ，證明不贅，請讀者自行證明。若 Z 恰巧是 Y，則 F 即是 Z（見圖 9b）。這個情況成立的充要條件是 $AE = \frac{3}{4}AD$，也請讀者自行證明。





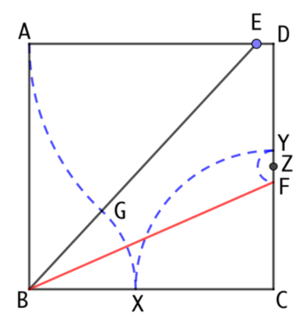


圖 9 a　　　　　　圖 9b　　　　　　圖 9c

讀者會問，為何不直接以 C 為中心、BG 為半徑構作一圓，與 CD 相交於 F 呢？那豈不是更快捷妥當嗎？這個好問題引來一段有趣的插曲，在群組討論當中，我們曾向香港中文大學課程與教學學系的吳藹藍教授請教，因為她的眾多研究興趣其中一項，正是動態幾何的學習環境。她提供的構作方法，正好就是上一段所敘述的。原因是她嚴格依循古希臘歐幾里得 (Euclid) 的古典方式，只用直尺和圓規，而且是一把所謂「用了一次即合攏」的圓規（a pair of collapsible compasses），只要圓規其中一足離開平面，它的兩足馬上合攏起來！歐幾里得 在《原本》（*Elements*）開首提出的公理三所描述的只是一把「用了一

次即合攏」的圓規，不過他馬上寫下定理一至定理三，相當於證明了一把「用了一次即合攏」的圓規可以當一把普通圓規使用，付出的代價只是多做幾個步驟而已！

我們執筆寫作本文的主要目的，是希望引起讀者注意兩點：(1) 從一道問題引發的群組討論，令參與者在互相切磋當中，各自獲益良多，很值得教師仝工經常進行。(2) 在不同年代成長的中小學生，其學習經歷不儘相同; 新科技的介入，不只在某些方面促進學習，更會影響思維習慣與方式，這是值得數學教育仝工多注意的課題，譬如動態幾何之於幾何的學習，就是一個好例子。