

數學 · 數學史 · 數學教師

蕭文強*

1. 引言

本文題目出現的三項事物，都包含“數學”這個詞匯，它們之間顯然有極密切的關係。但似乎在很多人的心目中，這三項事物卻沒有什麼關連。為什麼我會這樣說呢？讓我先解釋一下。這裏的“數學”指對數學的探討，包括學習數學知識、瞭解數學新動態、討論數學問題、以至進行數學研究；“數學史”指對數學發展的認識和學習；“數學教師”自然指課堂上的數學教學了。有些人自己對數學興趣極濃，研究幹得出色，但對教學卻不熱心，視作例行公事；對數學史更持輕蔑態度，認為它與研究無干，只是供數學功力不足的人拿來擺弄的玩意吧。有些人對教學負責，把自己要教的材料準備充足，課堂上應付裕如，但對提高自己的數學修養卻不重視，認為既然自己只是教學而不是搞研究，何需提高；對數學史也不重視，認為那是“花絮”而不是“正道”的數學，在教學上不能派用場的。所以，對一部份人來說，“數學”、“數學史”、“數學教師”可沒有什麼關連。

一篇短文決不能面面兼顧（本文原是給羅富國教育學院的講演的稿），為了避免引起誤解，讓我首先聲明將不談什麼，但那不表示我認為那些不重要。我將不談教學技巧，我只想提出一點：教師需要注意教學技巧，教學技巧是可以訓練的，所以教師需要自覺地訓練教學技巧；而且你一天任教師，你就得一天注意這回事。師範訓練提供這方面的基本知識，大大地減輕了獨自摸索的苦況，但日後在課堂上的體會也是很重要的。我也認為，教學不單是技巧，更是藝術。要做一位好教師，除教學技巧外，還得注意兩方面，一是個人修養，二是本科學識。前者層次較高，我也不談了，只想引一段美國數學家MOISE的話：“教學這項活動，涉及一種意義十分不明確的人際關係。教師本人是一位表現者、講解員、監工、領頭人、裁判員、導師、權威人物、對話者和朋友。所有這些角色都不易擔當，其中有不少還是互不調和的。因此，要成為一位老練成熟的教師，個人品格的細緻成長是不可或缺的。”至於本科學識，大抵沒有人懷疑其重要，我覺得奇怪的只是一點：沒有人相信只修畢小學數學課程便可以教小學數學，也沒有人相信只修畢大學數學課程便可以教大學數學，但為什麼很多人卻相信只修畢中學數學課程便可以教中學數學呢？我提出這疑問，並非提議所有中學數學教師必須修畢大學數學課程。反之，那未必是合適的做法。但顯然師範訓練中不能忽視本科的進修，而且那不能僅僅是把該科的大學課程“平移”過來就算了，更需要有的而發地選材。這是個重要的問題，必須集思廣益，全面探討，我也不敢談了。著名數學家教育家POLYA在一篇文章裏複述一位數學教師的妙語：“數學系給我們又厚又韌的牛排，嚼它不動；教育學院給我們淡而無味的清湯，裏面一丁點肉也沒有。”數學教師需要的是味道鮮美、營養豐富的濃郁肉湯！

* 任教於香港大學數學系。

我想在下文提出來跟大家討論的，中心思想大概是這樣子：我們已經肯定了教師學識的重要，但學識指什麼？我以為那應包括三方面，即是“才”、“學”和“識”，三者互有關連，也互有區別，但相輔相成。清代文學家袁枚說過：“學如弓弩，才如箭鏃，識以領之，方能中鵠。”我們先討論“才”、“學”、“識”的關係，然後以此為着眼點，看看“數學”、“數學史”、“數學教師”之間的密切關係。

2. 數學的“才”、“學”、“識”

數學在一般人的心目中佔什麼地位呢？大家都不會否認數學在科學研究、科技發展、社會科學、企業管理上的貢獻，矛盾卻在於大家往往只見到這些成就而忘卻了數學本身，難怪有人稱數學為“我們那看不見的文化”！而且大多數人或者不瞭解數學是什麼的一回事，或者只捕捉了片面零碎印象便以偏概全。受過普通教育的人，即使不是藝術家也知道有雕刻、繪畫、……；即使不是音樂家也知道有歌曲、旋律、……；即使不是文學家也知道有詩、小說、……；即使不是科學家也知道有核能、蛋白質、微生物、行星、……。但有多少人知道什麼是函數、公理系統、可換羣、流形、……？再者，不少人雖然不高興別人指出他對藝術、音樂、文學、科學一無所知，卻不介意別人說他對數學一竅不通，甚至認為不懂數學乃理所當然，說時縱非喜形於色亦必心安理得！你試向一位朋友說：“怎麼你的英文這麼差？”對方面紅耳熱地苦笑承認，而你大有可能從此少了一位朋友！但換了是說：“怎麼你的數學這麼差？”對方面有得色地呵呵笑，邊笑邊說：“是呀，在學校裏我一向最怕數學的，硬是弄它不通。”

為什麼會這樣子？我認為這是我們這羣數學教師的“羣恥”，“羣恥”一天不除，我們的工作一天沒有做好。導致這現象的原因可能有好幾個，我只提我想到的一個吧。數學有它悠久的歷史，當近代物理、化學、生物猶處於發展的初期，數學已經背上了二千多年的輝煌成就，但中小學的數學課程卻差不多只學到在這之前的數學！即使在大學裏，當其他學科正從十九世紀以後的發展推向二十世紀的新發現，大部份學生的數學知識卻終結於十九世紀初期！於是，數學漸漸形成它特有的一套語言，使非數學工作者感到難於親近。同時，數學是一門累積的知識，它的過去將永遠融會於它的現在以至未來當中，加上它的確具有抽象思維的本質，要真正瞭解它掌握它需要付出一定的時間和努力，並非所有人願意付出這樣的時間和努力（也沒有需要所有人成為數學家）。由此衍生一個教學上的現象，就是側重了數學的技術性內容，把它作為一門工具學科來講授。這樣做，教師可以在規定的時間內傳授一定份量的知識，也可以利用表面看來是清晰條達的手法迅速地教懂學生這套特別的語言。然而，這樣做也掩蓋了數學作為一門文化活動的面目，難怪很多認為自己將來毋需使用數學的人覺得數學與己無干，也樂於表示自己跟枯燥的公式和刻板的計算打不上交道了。這使我想起劉徽《九章算術註原序》裏的一段話：“雖曰九數其能窮纖入微，探測無方。至於以法相傳，亦猶規矩度量，可得而共，非特難為也。當今好之者寡，故世雖多通才達學，而未必能綜于此耳。”

所以，一個平衡健全的數學課程應該兼顧幾方面，粗略地可分為三點：(1)思維訓練；(2)實用知識；(3)文化修養。打開任何一份數學課程綱要，都可以在“教學目的”這一項底下找到這三點。當然，表達方式各有不同，所用字眼亦各有異，但基本精神是一樣的。如果我們不拘小節，但求捕捉箇中精神，一個更抽象更籠統的說法便是在上一節結尾時提到的“才”、“學”、“識”。(1)相應於“才”；(2)相應於“學”；(3)相應於“識”。

“才”指才能，於數學而言，就是計算、推理、分析、綜合的能力，也是洞察力、直觀思維能力、獨立創作力。“學”指與專業有關的知識，都從前人繼承而來，例如勾股定理、二次方程解公式、極限理論、積分計算等等。“識”指對知識分析辨別、融會貫通、梳理出自己的觀

點和見解這種能力。才而不學，是謂小慧；有學無識，只是“活動書櫥”；不學則難以有識，即使有亦流於根底膚淺。所以，三者相輔相成。我們希望自己做到的，更希望我們的學生做到的，就是三者兼之。

三者之中，“才”是最不好討論，因為雖然計算、推理、分析、綜合的能力還算可以訓練外（但也不易，而且效果難於測量），其餘像洞察力、直觀思維能力、獨立創作力是可培養而非可訓練的。不過，我願意介紹一些適合中學數學教師閱讀的參考資料：

G. POLYA, “How To Solve It”, 2nd Edition, Princeton University Press, 1957

G. POLYA, On Learning, Teaching, and Learning Teaching, Amer. Math. Monthly, 70 (1963), 605—619

D. SOLOW, “How To Read And Do Proofs”, Wiley, 1981

U. LERON, Structuring Mathematical Proofs, Amer. Math. Monthly, 90(1983), 174—185

我曾經在兩次給中學生的講演上強調人類思維能力的可貴，奉勸各位同學不要只滿足於現成的解法，不要滿足於一定的程序而不加深究、不願自己動手幹動腦想，以致變得思考遲鈍、思路含糊。在這裏，我想再強調這一點，“才”是需磨練得來的。

其次，“學”的討論一定與教學法有關，我已經說過不談的。但“學”聯繫着“識”卻是下面要討論的重點。為方便起見，不如合起來稱為“學識”。數學的“學識”可作縱橫看，縱方面就是追溯數學概念和理論的來龍去脈，橫方面就是探討數學的本質和意義。你或者問：“這麼大的題目，跟我的日常教學有關係嗎？數學的本質和意義是哲學上的問題，我只想教數學吧，管它什麼哲學觀點？我只想教懂學生現代數學吧，溯本尋源有何用哉？”

我不否認數學的本質和意義是哲學上的問題，而且每人對這問題有每人不同的見解和體會，我也不是要有一個人人一致的鐵定答案。但我不同意為了上述原因我們便迴避這個問題，我也不相信它對數學教師的工作沒有影響，讓我舉一個例子說明忽視這問題可能帶來的影響。各位對所謂“新數”、“舊數”之爭必已耳熟能詳（請參看以下一份很有份量的文章：

梁鑑添，評論近二十年來中學數學課程改革，《抖擻》，38（1980），64—75）

很多時我們聽到類似這樣的一些批評，它說“新數”的教材不適合中小學生程度，因為中小學生的認知能力尚未發展到可以接受如此形式化處理的階段。雖然這是實情，但如果僅僅是這樣，反對便顯得乏力了，因為那就像說：“真正搞數學的人是這樣搞的，可惜你們未達到那個程度，暫時只好改用別的你們可以接受的材料。”那豈非以“次貨”代“真貨”嗎？而且，言下之意還有“對牛彈琴”之嘆！不是的，我認為數學家根本不是那樣搞數學，所以“新數”的設想從根本即站不住腳。形成“新數”這種氣候和局面，是很多人（包括設計課程的人、編寫教材的人、教這些課程的人）對數學的本質和意義的信念的一種反映，這種信念是出於對“形式主義”的偏愛和誤解。德國大數學家HILBERT在本世紀初提出“形式主義”，視數學為沒有意義的符號進行沒有意義的紙上遊戲，那純粹是為了企圖解決數學基礎上的相容性難題。這個類似“釜底抽薪”的做法，是為這個特定目標特意精心設計出來的，卻不是說數學就是那樣子的活動。HILBERT本人的話，是最好的註解：“在我們的形式主義遊戲中所出現的公理和可證明的定理，乃是形成通常數學對象的那些概念的映像。”在他著名的《幾何基礎》卷首，他引用了十八世紀德國哲學家KANT的話作題詞：“人類的一切知識，皆始於直觀，再發展為概念，終於形成理念。”看看數學發展經過，當能更好明白這一點。我不打算作進一步的討論，但誰能再說數學本質的認識對數學教學沒有影響呢？

至於數學概念和理論的來龍去脈，是否陳年舊蹟？我看不是，因為認識它的來龍去脈，有助於加深個人對數學的瞭解。通過歷史材料，我們也可以瞭解一個數學分支何時興旺、何時停滯、何時衰退，從中吸取成敗經驗，知道數學發展的規律，培養個人對數學的鑒識力，這些對教學是有幫助的。讓我就着個人經驗舉一個例子，今年我開了一門“代數數論”，即是討論有理數域的有限擴張，但我從數論的歷史談起，以FERMAT'S LAST THEOREM為動機（那即是說 n 大於2時， $x^n + y^n = z^n$ 沒有非平凡整數解，問題至今猶懸而未決），引出以後的概念和定理，使學生明白那些抽象的理論紮根於實際問題。這樣做不只使課程較富趣味，更重要的是使它較富啟發。讓我再舉一個例子，就是很多學生視作畏途的 $\varepsilon - \delta$ 手法。一般書本上的定義使一些初學者看得頭昏腦脹，於是囫圇吞棗，終致消化不良！但如果我們試圖瞭解一下這種手法是怎樣演變來的，便會發覺就連 ε 這個符號也頗有點意思，它代表法文的“*erreur*”，是誤差的意思。十八世紀的數學家（如LAGRANGE）擅長以逼近法求近似值，譬如求 $f(x)=0$ 的根，自然地他們要估計誤差，譬如說，經過若干次逼近後所得的近似值與真值相差多少？同樣的手法，到了十九世紀的數學家手中（如CAUCHY），卻變成極限理論。他們反過來問，要逼近多少次才保證誤差不超過若干呢？這想法是近代數學分析嚴謹化的起步，也是 $\varepsilon - \delta$ 手法的基本思想。從這個角度看， $\varepsilon - \delta$ 手法只是具體的誤差估計吧，不是那麼高不可攀的。

從以上縱橫兩方面看，數學史明顯地能幫助我們增長學識。不只這樣，歷史還留給我們豐富的材料。如果我們從中吸取營養，並和以今天的知識，以“事後諸葛亮”的眼光把古今結合起來，還可以在課堂上發揮具體的作用呢。兩年前我給了一個講演，便是專討論這件工作，故不再重複，有興趣的朋友可參看以下兩篇文章：

蕭文強，數學教學上如何古為今用，《抖擻》，44（1981），70—73

蕭文強，活用數學史，《數學教學季刊》，2（1981），6—9

3. 實際的做法

以上我說明了數學上“才”、“學”、“識”的重要，也舉例說明了數學史對數學教師的用途。如果你接受上面的論點，剩下來應該討論的便是如何在師範訓練中增強對數學史的認識。容許我作一些建議，可行與否或應行與否，留待讀者爭辯討論吧。

我不認為單單開設一門數學史課程可以達致上述目的，正如我不認為在中小學獨立地講授數學史是合適的做法。我心目中的數學史，跟數學家心目中的數學史有些不同，也跟一些人心目中的數學史不同。我心目中的數學史，並非單指數學個別課題之編年史，也並非單指數學家的生平軼事，而是既指數學知識的演變，也指創造這種知識的人、產生這些人和這種知識的客觀條件、還有這種知識的社會作用。我們要追求的是一種“歷史感”，這種“歷史感”不能單從一連串名字、一系列大事年表、一幀幀肖像、或者一頁頁小故事中得到。歷史是在長時間中由事件累積而成，“歷史感”也是在長時間中因學習歷史而由淡至濃，以至濃得與本科混為一體而不可分。GOETHE曾經說過：“一門科學的歷史就是那門科學本身。”我的信念就是：數學史就是數學本身。所以，最理想的做法，是把師範訓練中的整體數學課程有機地圍繞着數學史建立起來。至少，讓數學史的精神滲透到課程裏去。我可以提議幾本適合教育學院的課本：

L. N. H. BUNT, P. S. JONES & J. D. BEDIANT, "The Historical Roots of Elementary Mathematics", Prentice Hall, 1976.

H. EVES, "An Introduction To The History Of Mathematics", 4th Edition, Holt, Rinehart & Winston, 1976

E. SONDHEIMER & A. ROGERSON, "Numbers and Infinity—A Historical Account

Of Mathematical Concepts”, Cambridge University Press, 1981

H. EVES & C. V. NEWSOM, “An Introduction To The Foundations and Fundamental Concepts Of Mathematics”, Holt, Rinehart & Winston, 1965

M. KLINE, “Mathematics in Western Culture”, Oxford University Press, 1953.

李儼，杜石然，《中國古代數學簡史》，港版，商務印書務，1976

我也可以提出一些供數學教師參考的“資料的資料”：

Mathematics Appreciation Courses: The Report Of A CUPM Panel (Bibliography & Reference List), Amer. Math. Monthly, 90(1983), C11—C20

L. LEAKE, What Every Mathematics Teacher Ought To Read (Seventeen Opinions), Math. Teacher, 65(1972), 637—641.

L. LEAKE, What Every Secondary School Mathematics Teacher Should Read—Twenty-four Opinions, Math. Teacher, 76(1983), 128—133

合起來它們列舉了三百種以上的（英文）書籍文章，使人目不暇給。當然，還有很多資料沒給包括在內，其中一本不在上述名單卻十分值得教師閱讀的書就是：

M. KLINE, “Why Johnny Can’t Add”, Vintage Books, 1973.

至於合適的中文參考資料也有不少，我個人最熟悉的自然是下面兩種：

蕭文強，《為什麼要學習數學？——數學發展史給我們的啓發》，學生時代出版社，1978.

《抖擻文選：數學教學論叢》，商務印書館，1981.

我們不可能在這裏詳細討論課程內容，但舉一個例子或者可以把我的設想表達得較為清楚。幾何向來是課程設計上的“疙瘩”，不論“新數”、“舊數”都未曾很好地解決這個問題。在六十年代（或之前）唸中學的朋友，一定還記得當時的綜合幾何是多麼困難的一部份，但起初幾課卻又似多麼無聊做作，先來一大堆說了有如不說的定義（例如直綫是有長度沒有闊度的東西），然後證明一些看來明顯不過的定理（例如兩直綫相交，對頂角相等）。當學生正困惑於什麼需證明、什麼不需證明之際，形勢卻急轉直下，接踵而來的是大批使人不知從何入手的習題，猶其作圖問題與軌跡問題，往往連班上“高手”也給難倒了！六十年代後期“新數”入侵課堂後，處理幾何的方法走向兩個極端，一是加入更多公理使它更嚴謹化，一是完全拋卻證明而單從直觀角度學習幾何知識。甚至有人認為綜合幾何根本不應在中學課程佔一席位，不如以解析幾何代替了它。我不知道八十年代中學幾何是什麼樣子，但從我的學生的反映，它一定不再是二十多年前我學的一樣了。曾經有位學生告訴我：“看了古希臘數學後，我才知道反證法對幾何也有用，以前在中學我只在代數用它。”另一次我測驗時擬了一道題，問能否用一條不經切割的鐵綫屈成一個正八面體的骨架，用意原在考察學生對圖論的認識，誰料全班四十五人中只有七八個答對，其餘的學生人人皆知運用什麼定理，可惜他們弄不清正八面體是什麼樣子。有人以為以那是正八邊形，也有人以為那是正八邊形為底的角錐！我不是要“復古”，但我覺得綜合幾何在教育上仍有其優點，若經適當編排，它是訓練抽象思維和邏輯思維、培養空間想像力的好工具，而且不少愛好數學的朋友一定還記得當年如何對綜合幾何“一見鍾情”！不過，要領略綜合幾何之美，單是“學”恐怕不足，猶需有“識”。特別是教師本人應該知道一點幾何的歷史，才曉得怎樣佈置教材。適合中學的綜合幾何材料，差不多全部在公元前四世紀希臘數學家 EUCLID 的“ELEMENTS”前六卷找得到。明代徐光啓與意大利傳教士利瑪竇合譯“ELEMENTS”亦只譯了前六卷（稱為《幾何原本》），使後世不少人誤以為“ELEMENTS”就是幾何課本。事實上，“ELEMENTS”十三卷包羅不少題材，不單是

幾何知識，而其編排處理的手法，更奠下後世數學公理化的基石，開了數學演繹精神的先河。這本書對後世的數學發展影響至大，也是人類思想史上的一個里程碑，難怪徐光啓評曰：“由顯入微，從疑得信。蓋不用爲用，衆用所基。真可謂萬象之形囿，百家之學海。”關於這本書的性質及編寫目的，衆說紛紜，近年來更出現一些新的觀點和論證，使“定案”變“懸案”，這本珍貴文獻更值得研究了。雖然我們不是要做數學史家，但這樣重要的一本著述顯然是應該認識的。通過對這本書的學習，突出重點（卷一不妨細讀），回顧古希臘數學的發展，探討歐氏幾何與非歐幾何的演變，對於增進我們的幾何“學識”是十分有幫助的。

我們在香港大學數學系裏也開設了一門叫做“數學發展史”的課，課的宗旨可分爲兩點：(1)除了使學生明白個別選講課題的發展經過以外，更希望通過這些選講課題的闡述使學生對數學有個整體認識，把它看成是人類文化的一部份，是人類集體智慧的累積結晶，是一門生機蓬勃的學科。(2)通過專題探討，培養學生的獨立探討能力、書寫和口述的表達能力。有關這門課的詳細情形，可參看以下的文章：

梁鑑添，蕭文強，一門與數學發展史有關的課程，《抖擻》，41(1980), 38—44。

4. 結語

讓我重複一遍，數學教學的目標是(1)思維訓練(2)實用知識(3)文化修養，三者應有適當的平衡。要同時達到這三點，一定有客觀條件上的困難，但作爲數學教師，我們必須肩負這項責任。經常接觸數學，可保持本身的活力和熱情；想想我們學科的歷史、本質和意義，或者是一種激勵和鼓舞。近代著名數學家 WEYL 說過：“我們並非宣稱數學應享有科學之皇后的權利，有其他科目與數學是有同等甚至更大的教育價值。但數學立下所有心智活動所追求的客觀真理的標準，科學和科技是它的實用價值之見證。如同語言及音樂，數學也是人類思維的自由創作力的主要表現形式，同時它又是通過建立理論來認識客觀世界的一般工具。所以數學必須繼續成爲我們要教授給下一代的知識和技能中的基本成份，也是我們要留傳給下一代的文化中的基本成份。”這就是我們的事業。