

先		先
乘		加
除		減
後	和	後
加		乘
減		除

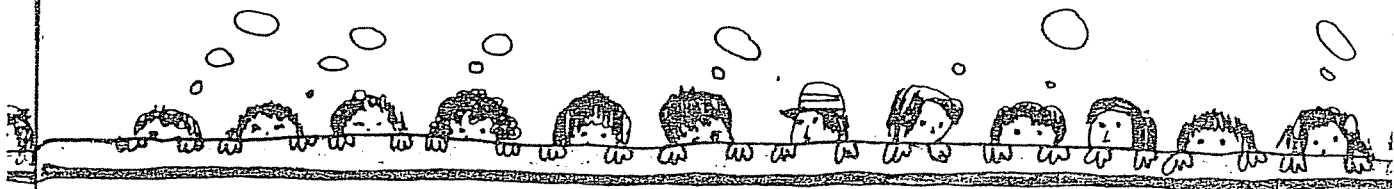
⊙ 蕭文強

首先，容許我解釋為甚麼提出(1)和(2)。我的兩位小甥兒在唸小學，功課上碰到甚麼困難，我的姐姐便會徵求一下我的意見（其實她找錯了對象，我毫無小學教學經驗，很多時根本不能向小孩子解明白道理。不過對我來說，這倒是個「磨練」，有時甚至迫使我搞清楚一些平日我不會想到的問題）。有一天她問我：「 $3 \div 4 \times 8 = ?$ 先乘抑或先除？」我試圖解釋，卻越說越糊塗，終於發現癥結所在，原來我們兩人各自對那個「先」字有不同的想法。 $3 \div 4 \times 8 = 3 \times 8 \div 4 = 8 \div 4 \times 3 = \dots$ ，意思是說先把4除3再乘8，跟先把3乘8再用4除，跟先把4除8再乘3，答案都是一樣。但 $(3 \div 4) \times 8 \neq 3 \div (4 \times 8)$ ，意思是說先把4除3再乘8，跟先把4乘8再用得數除3，答案是不一樣。這令我想到，要把這回事解釋清楚，必須先弄清楚數的基本性質。固然，這些基本性質是不適宜以形式化的手法向小學生灌輸的。但教小學生的人知道這方面的知識，卻有助於講解。雖然我們不必把全部「真相」講給小學生聽，但如果自己對「真相」沒瞭解清楚，心裏始終有個疙瘩，而且如果自己未弄明白，也就很難講解明白的。

閒話休提，書歸正傳。首先我們必須接受一些關於數的運算的基本性質（形式地說，就是數系統的公理），其中一條說 $(A+B)+C=A+(B+C)$ 和 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ ，稱為「結合律」，另一條說 $A+B=B+A$ 和 $A \times B = B \times A$ ，稱為「交換律」。這裏的括號，是用來標明把那兩個數進行運算。把「結合律」和「交換律」略加推廣，便知道如果把一串數相加(乘)，你可以先取任何兩個數相加(乘)，得到的數與剩下來的任何一個數相加(乘)……直至加(乘)完為止。不論怎樣選取，答案總是一樣的。

甚麼叫做 $A - B$ 和 $A \div B$ 呢？應該這樣看， $A - B = A + (-B)$ ，這裏的 $(-B)$ 代表一個唯一地與 B 相加是 0 的數，而 $A \div B = A \times (1/B)$ ，這裏的 $(1/B)$ 代表一個唯一地與 B 相乘是 1 的數（甚麼是 0 和 1 ？那是基本性質之一，不贅述）。所以把一串數相加或減（乘或除），只要你採用以上的觀點，輔以前一段的解釋，便知道先加後減或先減後加（先乘後除或先除後乘），結果是一樣的。好比方 $A - B + C + D - E = A + C + D - B - E = C - E + D - B + A = \dots = A + (-B) + C + D + (-E)$ ，這些式的意思都是從左面頭一個數起，由左至右逐個加或減（對小學生大可不必搬出這一大套道理，例如用收支實例說明，豈非更「平易近人」。）同樣地， $A \times B \div C \times D \div E = A \div E \div C \times D \times B = D \div E \times B$

有這樣的兩個問題：(1) 大家都知道「先乘除後加減」，但先乘抑或先除？先加抑或先減？(2) 要是換了「先加減後乘除」有甚麼後果？如果你覺得(1)和(2)都是「傻」問題，而且肯定自己懂得怎樣答覆的話，請不要看下去。如果不是的話，就讓我們來談談吧。



$\div C \times A = \dots = A \times B \times (1/C) \times D \times (1/E)$ ，這些式的意思也是從左面頭一個數起，由左至右逐個乘或除。

但如果式中既有加又有乘（減可化為加，除可化為乘），怎辦呢？譬如 $2 + 3 \times 4$ 是甚麼意思？如果按照剛才由左至右做的說法， $2 + 3 \times 4 = 20$ ， $2 \times 4 + 3 = 11$ ， $3 \times 4 + 2 = 14$ ，眾說不一！為了明確地知道要做甚麼，只好借助括號來標明，例如 $(2 + 3) \times 4 = 20$ ， $2 + (3 \times 4) = 14$ 。用了括號後，明確是明確了，但碰到一串數的運算時，括號外又有括號，看來如洋蔥，寫來不方便，例如

$$(2 + (4 \times (6 + 12) \times 3) \times (8 + 7) + 1) = 3243$$

於是我們來個「君子協定」：先乘（除）後加（減），這樣可省一些括號，例如上面的式只用寫成

$$2 + 4 \times (6 + 12) \times 3 \times (8 + 7) + 1 = 3243$$

去掉幾重洋蔥皮，不是好看多嗎？

為了更好明白這個人為的協定，不妨假設有位「暴君」硬要天下萬民「先加減後乘除」，那麼會怎樣呢？其實甚麼變動也沒有，只是寫法上有不同吧，「暴君」也無法改變由自然而來的數學呀！例如我們慣見的 $A \times B + C$ 便要寫成 $(A \times B) + C$ ，否則「暴君」的子民計算出來的，卻是我們寫成 $A \times (B + C)$ 的數！再強調一遍，我非「暴君」，提出「先加減後乘除」絕對不是要小孩子按照這規矩計算，而是為了從另一方面說明「先乘除後加減」純粹是求取方便的人為規矩而已。

既提到括號，自然涉及另一些問題，就是為甚麼 $A - B + C = A - (B - C)$ ？或者為甚麼 $A \div B \times C = A \div (B \div C)$ ？要回答這些問題，又得返回那些基本性質去。 $A - (B - C) = A + (- (B - C))$ ，這裏的 $(- (B - C))$ 代表一個唯一地與 $B - C = B - (-C)$ 相加是 0 的數。因為 $B + (-C) + (-B) + C = 0$ ，所以 $(-B) + C$ 就是 $(- (B - C))$ ，即是說 $A - (B - C) = A + (-B) + C = A - B + C$ 。類似地可推出 $A \div (B \div C) = A \div B \times C$ 。

在這篇文章裏，我只是提議教師最好瞭解數的基本性質，卻不是提議要照搬來教給小學生。關於數的基本性質，很多書本都有討論，相信在師資訓練課程和大學課程裏也有提及，但似乎往往忽略指出為甚麼要討論這項課題，以致使人以為那只不過是多學一套公理系統，甚至認為那是鑽牛角尖的玩意（有本小書，卻值得拿來參考，就是項武義著的《從算術到代數》，科學出版社，1981）。

我在文章開首說過，自己明白箇中道理後，至少教來心裏也舒服點。「怎樣教呢？」卻是個極富挑戰性的問題，看來還未曾好好地解決。「舊數」迫使學生遵循一定的規則去做，照做可也，不要問為甚麼。「新數」告訴學生另一堆他們不理解的「新」規則，照單全收可也，不能問為甚麼。有沒有第三個辦法呢？有待各位數學教師的才智和努力了。

