

數學的傳承 —— 井蛙學算四十年

(2005 年 6 月 18 日退休演講)

蕭文強
香港大學數學系

很多年前張百康校長對我說：「他日你作退休演講，必須穿著短褲出席。」當時他說這句話的用意，大概不是暗示我需要提早退休，只是叫我保持本色。其實，於我而言，要保持本色毫不困難，因為我沒有什麼要保持，正所謂「三無」教授一名 —— 無自用車、無手提電話、無 CERG (Competitive Earmarked Research Grant)。六月三十日之後將成為「四無」教授 —— 無薪教授，亦稱作 Honorary Professor。

然而，我十分慶幸自己是「三無一有」—— 有學生。今天見到在座中這麼多熟悉的面孔，都是過去三十年間在不同時候在我的課上見到的，叫我感激萬分。你們畢業後仍舊不時回來探訪我，與我分享你們的工作體驗和見聞，與我討論各方面的話題。正是你們的造訪，讓我保持身心年青。法國著名學者 Claude Lévi-Strauss 說過：「選擇教書作專業的學生並沒有向童年世界告別，反之，他正是要保持童心。」

早在三十年前我已自視作「井蛙」(有當年 1976 – 77 的微積分講義插圖為證！)既是井蛙之見，何足道哉？但正因經歷平凡，才具見親切，並非高不可攀。趁著退休演講談談四十年的學習經驗，對大眾也許還有一點參考價值吧。

既然退休年齡是六十歲，為何不是「學算六十年」呢？佛家經典《百喻經》裏面有個著名的故事，說某人吃了七個餅便飽了，他大嘆不值，認為早知如此，不如只吃第七個！固然，我不至像那人一般傻，看不到數學基本功的重要。在大學的學習，乃建基於在小學和初中學到的本領。但的確，我是在 1963 年秋季踏入大學之後才領略何謂數學，有如柳宗元在《始得西山宴遊記》(809)說的：「然後知吾嚮之未始遊，遊於是乎始。」

為何我鍾情於數學呢？不如讓我用一套電影劇本裏的幾位主角作個譬喻。我頗喜歡這套 *Chariots of Fire* (港譯「烈火戰車」)，電影攝製於 1981

年，翌年獲頒四項金像獎，包括最佳影片、最佳編劇、最佳服裝設計和最佳音樂。故事環繞 1924 年夏天在巴黎舉行的奧運會鋪陳，劇本是根據當年真人真事編織出來。那是英國田徑隊的豐收年，田徑隊的主將是 Harold Maurice Abrahams (1899 – 1978) 和 Eric Henry Liddell (1902 – 1945)。前者取得一百公尺金牌和四百公尺接力銀牌，後者取得四百公尺金牌和二百公尺銅牌。電影劇力萬鈞，但也許真實情況之多姿多彩，與電影情節不遑多讓。Abrahams 是猶太裔英國人，他矢志在田徑場上出人頭地，爲了民族榮譽而跑。Liddell 是虔誠基督徒和牧師，他是爲了榮耀上主而跑。我一邊看電影一邊想，做數學是否有類似之處？有些人做數學是爲了某特定目標，或是爭取個人榮譽，或是爲國爭光；也有些人做數學是爲了崇高理想，超越個人民族，是爲了數學本身的價值。我自問兩者都不是，反而更像電影中的一位配角 Lord Andrew Lindsay (在真實生活中他是 Lord David George Brownlow Cecil Burghley (1905 – 1981)，在 1924 年奧運會參賽一百一十公尺跨欄，不入三甲。到了 1928 年奧運會他取得四百公尺跨欄金牌，在 1932 年奧運會又取得四百公尺接力銀牌。) Lindsay 是爲了享受田徑運動本身的樂趣而跑。電影中有一幕頗能表達這一點，Lindsay 在自己的莊園的草坪上練習跨欄，在每副欄上放了一杯香檳酒，每次飛越欄不動杯酒分毫。(在真實生活中，Burghley 的練習相似，不同的是他在每副欄上放了一枚火柴盒，目的是每次飛越欄把火柴盒踢掉但欄卻不倒。)我鍾情於數學，是爲了從學習和研究數學中得來的愉悅和從中感受到的優美。

先說一點中學的數學學習歷程吧。中學畢業那年是 1961 年，級主任吳國光老師提醒我們要好好記住這一年，把它顛倒過來仍然是 1961，過後要等四千多年至 6009 年才再有這份奇遇了！當年我們沒有袖珍計算器，也沒有液晶顯示板，所以不曉得其實毋需等四千多年，只要等到 2002 年，顛倒了仍然是 2002！如果你不要求顛倒了的數字不變，只要求它仍然是一個數字，那麼今年也是一個，2005 顛倒過來是 5002。看來我在 1961 年畢業，顛倒過來還是一樣，難怪畢業後至今猶原地踏步。希望在 2005 年退休，顛倒過來是個大得多的數字，意味向前邁進！

在中一和中二的時候，我對數學興趣不大，但踏入中三開始學習歐氏幾何，擦出了火花。印象特別深刻的是那幾條三角形中某些線共點的定理，如此漂亮的結果，每次畫出來都對，但不明其所以然。後來明白其所以然，竟是如此滴水不漏的推理，嘆爲觀止。三中線共點尤其令我開竅，因爲那

時正好學到物理的重心性質，物理與數學相互印證，使我感受到不同科目的和諧，是一種「文化震撼」。在中三和中四我對歐氏幾何簡直著了迷，專門找難題做，特別喜愛思考作圖問題和軌跡問題（其實兩者有密切關連），有些難題想了好幾個月仍不罷休。有時更自行把問題推廣，例如有一題至今我還有印象：本來的作圖問題是在給定的三條平行線上各找一點，形成一個正三角形。解決了這道問題後我便想到三條線不平行但共點又如何？三條平行線可以看作是三個無限大同心圓的部份，如果真的是三個同心圓又如何？如果更一般地只是平面上三條互不平行的線又如何？就是這樣我在歐氏幾何的天地裏樂而忘返，很可惜當年沒有學習幾何的互動軟件（電算機是我在美國唸研究院時才頭一次碰見的東西，遑論軟件矣），否則我會更著迷了。

對代數首先產生興趣，也是因為看到它和幾何拉上關係。當時的課程沒有附加數學，也就沒有解析幾何這一門（至中七才有），就連函數這個概念也不明言。但代數課本有圖像這一章，為瞭解函數播下種子。印象最深刻的是課本（A.B. Mayne 的 *Essentials of School Algebra* (1938)）裏的一道習題：「在同一幅圖上描繪 $y = x^2$ 和 $5y = 6x + 4$ 的圖像， x 取值於 -2 至 3 之間。利用圖像解方程 $5x^2 = 6x + 4$ 。在圖中繪作某條適當的平行線以求 a 的近似值，使方程 $5x^2 = 6x + a$ 有重根。」印象中我思考了好一會才解決了這道習題，但箇中樂趣，餘韻猶在。

我對代數的真正喜愛，源自中四下半年學到的「餘數定理」：「以 $x - h$ 除多項式，要是除不盡，餘數就是在多項式中代入 h 計算得來的值。」起先我真的運用長除法驗算了不少情況，但要寫下一般情況的解釋，好像繁瑣不堪，只是有種感覺理應如此吧。當時母校有一項傳統，就是待高年級同學去了考公開試期間，本來任教高年級的老師便到別的班級當客座教師。本來任教中七的伍志剛老師來到中四教代數，他正式解說何謂函數，並且以函數形式寫下 $F(x) = (x - h) Q(x) + R$ 這個式子，由此馬上得出 $F(h) = (h - h) Q(h) + R = R$ 。眼見繁瑣的具體計算一下子歸結成如此簡潔的解釋，是另一次「文化震撼」，使我明白到數學抽象化的力量。

中五會考過後，伍老師說可以在暑假期間指點我學習微積分（當時課程要到中七才有微積分）。於是我每天到教員工作間跟老師唸 W.A. Granville 的 *Elements of Differential and Integral Calculus* (1904)。印象最深刻的東西

是學了不久之後便碰到一道習題，計算火箭要達致什麼速度才能脫離地球的引力場（這個逃逸速度通常稱作第二宇宙速度）。當時似明非明地竟然算出了那個速度是每秒 11.2 公里，適值那段時期的熱門新聞是衛星上天，報章上不時出現有關的科學報導，兩相呼應，叫我興奮莫名！回想起來，那時其實概念模糊，有如霧裏看花，理解不清，只是生吞活剝。但是形式上的運算倒也利落，從 $-m \frac{dv}{dt} = \frac{GMm}{r^2}$ 出發，通過 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ $= \frac{dv}{dr} v$ 而得 $-mv \frac{dv}{dr} = \frac{GMm}{r^2}$ ，進而得 $-v dv = \frac{GM}{r^2} dr$ ，繼而左右二式取積分，……。如此這般，竟也過關斬將，直搗黃龍！那時並不知道何謂微分方程，更不懂得各類型微分方程的算法。甚至在第一步我不知道左式有個負號。只是做到結尾得到速度是個負數才自圓其說地在第一個式子左邊加上一個負號！由此可見當時理解程度之薄弱，介乎明與不明之間。也許，在學習過程中，某些階段大家都要經歷過這樣的朦朧日子，只要日後逐漸弄清楚便成。的確，微積分在歷史上的發展又何嘗不是經歷過這樣的日子呢？

到了中七，我嘗試做更多習題，幾乎是見一本書便做一本，盡量全做書裏的習題，典型的例子是 C.J. Tranter 的 *Techniques of Mathematical Analysis* (1957)。後來又買了一本名叫「純數」的書，只因爲中七公開試報考了「純數」這一科，但買回來打開一讀便知道買錯了！那是 G.H. Hardy 的經典名著 *A Course of Pure Mathematics* (1908；第十版，1952)，看了幾頁便看不下去。結果待中七公開試考罷，每天有空便攜帶 Hardy 的書走到家裏附近公園坐在樹下嘗試慢慢讀，囫圇吞棗竟也讀出一點味道來。印象最深刻的是書後面其中一個附錄討論「代數基本定理」，看到一個（貌似是）代數的結果要動用複變分析去證明，讓我再一次驚訝於數學各分支之間的密切關連。

提到課外閱讀，那是我在小學中學時期的樂趣，包括各方面的課外書。還記得讀的第一本數學課外書是劉薰宇著的《數學趣味》(1933)，爲什麼記得那麼清楚呢？因爲我認識這位作者並非通過數學科而是通過語文科。劉薰宇是上一個世紀二十年代上海立達學園的數學教員，也教國文，與夏丏尊共事，合寫了《文章作法》(1928)。唸國文時曾讀過這些中國作家的文章，從作者生平中認識了他們，便讀了好幾本他們的語文著述（當中最

著名的是夏丏尊和葉紹鈞合著的《文心》(1933))。有一回在書店見到劉薰宇的書，而且是關於數學的，當時我唸中三，剛被幾何引起了興趣，便立即買了《數學趣味》回家細讀。接著我看了大量的數學課外書，大部份是內地出版的，尤其是那些翻譯自俄文的數學普及讀物。也由此我學懂了閱讀簡體字。英文的數學課外書則較少讀，至中五和中六才開始看一些，印象猶深的是 W.W. Sawyer 的兩本：*Mathematician's Delight* (1943) 和 *Prelude to Mathematics* (1961)。

英文課外書售價不菲，我通常是到圖書館借閱。那個時候還未有市立圖書館（香港大會堂仍未建立），除了學校的圖書館以外，我有另外兩個好去處，其一是美國新聞處圖書館（在雪廠街近都爹利街附近），其二是英國文化協會圖書館（在中環告羅士打行樓上，即今置地廣場所在）。我較喜歡後者，因為地方雖小卻十分典雅幽靜，英國式古宅的味道很濃，極少人到訪。拿一本書坐在一個角落的舒適沙發椅上，就著身傍座地燈可以消磨整整一個下午。在英國文化協會圖書館閱讀過的書本其中兩本對我很有影響，一本是 Dan Pedoe 的 *The Gentle Art of Mathematics* (1958)，另一本的作者和書名我都忘記了，只記得書裏敘述數學在古代希臘的發展和它於西方文化之影響。我對數學史的興趣是很多年後（七十年代初期）才油然而生，但也許那本書在一個中學生的思維中已經播下了種子。美國新聞處圖書館熱鬧得多，人來人往，我每次去借了書便立即回家，並不逗留。許是太多中學生去借書，書架上的熱門書籍（例如 F.W. Sears 和 M.W. Zemansky 合著的 *College Physics* (1952)，被不少高中學生奉為「物理科的聖經」）往往只餘下一個硬紙做成的書盒，書脊印上書名，裏面卻是空空如也！印象最深刻的一本書是 I. Asimov 的 *Building Blocks of the Universe* (1957)，敘述元素周期表的故事，又一次令我感受到不同學科（化學、物理、數學）的密切關連。

還有一本課外書予我的影響也頗大，就是 E.T. Bell 的 *Men of Mathematics* (1937)。這本書得到的評價，褒貶參半，對書本的微言主要是內容與史實不符，渲染之餘以訛傳訛。不過，我們對作者應持較公平的態度，因為其實他在序言已聲明在先：「本書絕無任何意思作為一本數學史著述，甚至不是數學史任何片斷的敘述。」書裏描繪各位數學大師的生平故事，瀰漫著一種浪漫情懷，與史實不一定完全相符，但對讀者而言，倒是非常吸引及鼓舞的。我在大學一年級暑假借閱此書，深受數學家的學術

生涯吸引，到了大學畢業時捨物理而就數學，與讀了此書不無關係。

總的來說，我在小學、中學、大學的學習歷程，有苦也有樂，以後者居多。今人好言「愉快學習」，其實古已有之，《論語·學而》說：「學而時習之。不亦說乎。」《論語·雍也》說：「知之者不如好之者。好之者不如樂之者。」不過，這不等於說為學不必下工夫。宋代王安石寫了一篇《遊褒禪山記》，文中有句「入之愈深。其進愈難，而其見愈奇。」我也記得讀過一句詩（忘了出處）：「寶劍鋒從磨礪出。梅花香自苦寒來。」正好說明下了工夫而自得其樂的境界。在一本好書的序言（J. Baylis, R. Haggarty, *Alice in Numberland : A Students' Guide to the Enjoyment of Higher Mathematics* (1988)）作者說：「每位專業數學家都清楚知道娛樂成份與認真態度並非互不相容。我們寫作此書下的工夫在於保證讀者既歡享娛樂成份也不會忽略數學上的重點。」再說一段故事，清代數學家李善蘭與英國傳教士 Alexander Wylie 在 1852 年至 1859 年期間合譯《代數學》（原著是 A. De Morgan 的 *Elements of Algebra* (1835)）和《代微積拾級》（原著是 E. Loomis 的 *Elements of Analytical Geometry and Calculus* (1850)），向中國數學家介紹西方近代數學。較李善蘭年輕二十二歲的華蘅芳欲鑽研西方數學，向李善蘭請教，李善蘭贈以譯稿，著他細讀。華蘅芳看了幾頁看不下去便問李善蘭怎麼辦，後來他在《學算筆談》卷五（1882）寫下了這樣一段話：「披閱數頁外已不知其所語云。……詰諸李君。則云此中微妙非可以言語形容。其法盡在書中。吾無所隱也。多觀之則自解耳。是豈旦夕之工所能通曉者哉。余信其言。反覆展玩不輟。乃得稍有頭緒。譬如傍晚之星。初見一點。旋見數點。又見數十點數百點以致燦然布滿天空。」我鍾情於數學，就是想欣賞這「燦然布滿天空」的繁星。

讓我略去大學與研究院的學習經歷，並非說那不重要，只是演講的時間有限。正如我在開首說，我踏入大學之後才領略何謂數學，在大學與研究院渡過的時光，是我的數學成長期。那些體驗經多年累積沉澱，形成我對數學的看法，在這兒我想與大家討論其中之一——「歷史」與「傳承」。我服膺於科學史家 George Sarton 的一段話：「數學史家的主要任務，同時又是他最鍾愛的特權，就是詮釋數學的人文成分，顯示數學的偉大、優美和尊嚴，描述歷代的人如何以不斷的努力和積累的才華去建立這座令我們自豪的壯麗紀念碑，也使我們每個人對著它嘆為奇觀，感到謙遜而謝天。學習數學史倒不一定產生更出色的數學家，但它產生更溫雅的數學家。學

習數學史能豐富他們的思想，撫慰他們的心靈，並且培植他們的高雅品質。」
 (*The Study of the History of Mathematics* (1936))

曾經上過我的課的朋友，都知道我在所有課上都滲透數學史的素材，但很多時我心存猶豫，即是敘述要多貼近史實？我清楚知道自己並非專業數學史家，要教的是數學而非數學史。固然，我有自己的一種想法和信念，去年讀了數學史家 Ivor Grattan-Guinness 一篇文章 (History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education, 刊於 *American Mathematical Monthly*, 111 (2004), 1 – 11 頁)，受到更大的啓迪。他說了一句語重心長的話：「歷史和傳承都是處理過去的數學的正當手法，但把二者混爲一談，或者認定其中之一從屬於另一，那就不是了。」我認爲以後人的眼光看前人的工作，難免沒有滲入並不存在於前人原意的想法。作爲數學史研究，那是必須慎防的做法，但作爲數學教學的一種輔助，這種貫通古今的全局觀卻是彌足珍貴。以下我舉兩個例子說明「歷史」與「傳承」的微妙區別。

第一個例子是很多人都熟悉的故事，經不少書本轉述流傳下來：古代埃及人懂得邊長是三、四、五的三角形是直角三角形，利用打上 $3 + 4 + 5$ 個間距相同的結的繩，他們構作直角，建成垂直於地面的柱和牆。這段傳說，似乎源於數學史家 Moritz Benedikt Cantor 的著述 (*Vorlesungen Über Geschichte der Mathematik*, 四冊 (1880 – 1908))，但其實他在書上只是說：「暫時讓我們假設 —— 但未經證實是否如此 —— 古代埃及人懂得三邊的長三、四、五滿足等式 $4^2 + 3^2 = 5^2$ ，而且他們並沒有忽視這三邊圍成一個三角形，較短的兩邊夾著直角。」荷蘭數學家兼數學史家 Bartel Leendert van der Waerden 在他的名著 *Ontwakende Wetenschap: Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde* (1950) 指出這是以訛傳訛的傳說，他認爲 Cantor 是想當然耳。可以肯定的是：(i) 古代埃及有專業測量建築師，稱作「拉繩者」，在古代遺跡的壁畫上見得到，(ii) 古代埃及的建築物有垂直於地面的柱和牆，角度相當準確。van der Waerden 說 Cantor 只是運用推理：首先，Cantor 認爲這些直角是由「拉繩者」做成，而 Cantor 自己只能夠想得出拉一條 $3 + 4 + 5$ 的繩圍成直角三角形，便斷言古代埃及人必定是那麼做了。但是在課堂上講這個故事，運用這個簡單的教具（打了結的繩），學生會感興趣，數學內容或能更好掌握，何樂而不爲呢？頂多加上一句附註，說明沒有明確的歷史證據，斷定古代埃及人知道 $3^2 + 4^2 = 5^2$ 與直角三角形

的關係。說不定由此可以引起更多的數學討論，探討如何構作直角呢。

第二個例子是秦漢時期的數學古籍《九章算術》（公元前一世紀至公元一世紀之間）卷一第三十二題的圓田面積公式「半周半徑相乘得積步」，用今天的數學語言表達，就是 $A = \frac{1}{2} Cr$ 。在古代數學文獻裏，不只一處出現這個結果及其解說。除了三國魏晉時劉徽注《九章算術》提出的割圓術以外，還有希臘數學家Archimedes在*Measurement of a Circle*（公元前三世紀）運用外切正多邊形和內切正多邊形從外從內逼近圓周的計算，也有猶太數學家Abraham bar Hiyya ha-Nasi在*Treatise on Mensuration*（十二世紀）把圓看成是由無窮個由大至小的同心圓組成，把同心圓逐個展開成長短不一的直線，組成一個高是 r 底是 C 的等腰三角形的想法。這些手法，各有千秋。這些文獻上的敘述，都是「歷史」。從「歷史」尋找，我們可以設計不同的解說，甚至構作生動的教具切合不同年級講課之用。再進一步，讓我們比較一下 $A = \frac{1}{2} Cr$ 和 $A = \pi r^2$ 這兩道公式。由於 $C = 2\pi r$ ，二者等價，但前者有個優點，是顯示了一個重要深刻的問題： A 是二維的量度， C 是一維的量度， A 是由 C 為邊界曲線圍成的區域的面積，二者有沒有關連呢？在高等數學，這項美妙關連叫做「微積分基本定理」。大家在中學已經見過「微積分基本定理」最初等的（一維）形式，憑著它我們能計算眾多的（定）積分。「微積分基本定理」的高維推廣，叫做「Stokes定理」，說明了某個可定向流形上的積分與有關的微分形式在該流形的邊界上的積分的關係。在大學一年級微積分課程必定學到「Green定理」，是「Stokes定理」的二維情況，把它用到一個圓上面，立即得出 $A = \frac{1}{2} Cr$ （較詳細的敘述，見另文「『歷史』與『傳承』」，刊登於*Datum*, 42 (2005), 1 – 5 頁）。這類討論，便是「傳承」。

「歷史」或「傳承」，都是倚仗前人的智慧。難怪黎巴嫩裔美國詩人Kahlil Gibran 有一首詩這樣說：「你手提的燈並非是你的；你唱的歌並非在你的心中譜成。因為即使你提著燈，你本身並非是亮光；即使你是一把弦琴，你並不是彈奏弦琴的人。」（*My soul preached to me* (1922)）我們身為教師，對此當有體會。

英詩之父 Geoffrey Chaucer 在 *The Canterbury Tales* (1386) 把朝聖者群中一位牛津學者形容為「And gladly wolde he lerne and gladly teche（他所喜愛的是學與教）」正好作為我的寫照，因為我一向相信「教學相長」這句話。初中的時候我讀過一副妙聯：「若不撇開終是苦。入如反顧方為人。」巧妙

貼切地把「若」、「苦」、「入」、「人」這四個字嵌進對聯的內容，所以至今我還記得。（當時我少深究文章出處，所以不能肯定作者是誰。後來有人告訴我那可能是出自清代才子紀曉嵐筆下。）上聯很應景——撇開了系主任之職，我不再「苦」！下聯則更有意思。有位美國電腦專家 Scott Kim，擅長繪畫異常巧妙的美術圖案，有次他繪了一個英文字 teach，把它反轉再顛倒過來看，竟然是 learn。我非常喜歡這幅圖案（可以在 J.R. Block 編著的 *Seeing Double* (2002) 找到），因為它表達了教與學只是一體的兩面吧！印度文豪 Rabindranath Tagore 有一首詩講述對一位教師的要求，很值得我們記住：

「不求進步的老師，不是真正的老師。
 自己不在燃點的蠟燭，又怎能點亮別的蠟燭？
 不再主動求知的老師，就開始重複陳詞濫調，
 他只能加重學生頭腦的負擔，
 不能激起思想的活力。」

有一段話，我用以自勉，也常常與將為人師或已為人師的舊學生共勉：
 「為教人而教書，由教書而教人。學而不厭，方能教而不倦。學無止境，教無止境。」今天你們回來與我共渡這個對我意義重大的聚會，予我莫大的支持和鼓勵，叫我心存感激，多謝各位。