

中國古代官學數學課程： 考生是怎樣學習和準備考試的？

蕭文強
香港大學數學系

本章首先概述中國古代數學教育，然後詳細討論唐朝官學數學課程和科舉制度中的明算科。在本章的第二部分，作者運用"間接證據"重新建構了一些試題，意在提出另一種與傳統觀念不同的觀點。以表明中國古代的數學學習並非是應試的和死記硬背的。這段"動畫式"歷史考察，或將有助於進一步瞭解東西方數學教育的比較研究。

1。引言：儒家傳統文化背景下的學習者悖論和教師悖論

自二十世紀九十年代以來，教育工作者開始關注文化差異如何影響某些科目的教學與學習，如數學及科學，這些科目的內容向來被視為具有不分地域的普遍性（Cai, 1995; Stevenson & Stigler, 1992; Watkins & Biggs, 1996）。在國際教育成就評估協會（IEA）和經濟合作與發展組織（OECD）等團體發起的幾項國際研究所得結果的推動下，這方面的研究有了更進一步的深化。特別是過去十年中，在儒家傳統文化（CHC）環境中成長的亞洲學生，其學習過程已經成為一項熱門的議題（Leung, 2001; Watkins & Biggs, 1996; Wong, 1998）。隨之衍生的，儒家傳統文化課堂中亞洲教師的教學過程亦受到審視（L. Ma, 1999; Stigler & Hiebert, 1999; Watkins & Biggs, 2001）。這兩個緊密相關的問題集中體現為兩種悖論，那就是：

（1）儒家傳統文化背景下的學習者悖論：儒家傳統文化課堂裏學生採用的學習策略，被認為是低水準的、死記硬背的，這種策略是不利於取得好成績的；但調查卻表明他們屬意於高水準、有意義的學習策略，而且他們在國際評價中取得了比其他地區的學生更為優異的成績。

(2) 儒家傳統文化背景下的教師悖論:西方教育工作者認為儒家傳統文化課堂缺乏產生良好成果的條件,但教師卻創造出了積極的學習效果。

本章通過對中國古代官學數學課程的研究,從歷史的角度來看這些問題。對中國古代數學教育作簡要介紹後,我們將著重討論唐朝(618-907)“國立大學”課程,特別是這一時期科舉制度中的明算科。我們之所以選擇這一時期,不僅因為明算科在唐朝建立得最為完善,而且這一制度在以後的各個朝代中,不是成為範本便是被取消。本章把大部分篇幅放在科舉制度上,是因為人們通常認為,儒家傳統文化課堂是由應試文化所主宰,而應試文化卻妨礙了學生的學習。果真如此嗎?本章通過結合中國古代典籍中的官方記載以冀“合理重建”唐朝科舉中的明算科試題(因沒有尚存的數學試題的文獻記載),我們提出如下問題:考試制度真的對學習有害嗎?考試是一種“不得已之惡”還是在某種程度上有利於學習過程呢?科舉僅僅是對死記硬背學習的一種測試嗎?

作者主要引用了他自己的三篇文章(Siu, 1995; 2001; Siu & Volkov, 1999)的論點。鑒於數學教師和數學教育工作者不容易找到這些文章,本文綜述這些論點,或有助於進一步瞭解東西方數學教育的比較研究。第一篇文章關於中國古代數學教育,是一九九二年的一篇講稿。由於第二篇文章(與數學史學家 Alexei Volkov合作的)作了更深入的歷史研究,前一篇可以說僅是“雛形”而已。第三篇文章是一九九八年的一篇講稿,它更傾向於教學方面,也最接近本章的主題:那篇文章發表於一九九八年在 Louvain-la-Neuve和 Leuven舉行的第三屆歐洲夏季大學(European Summer University)論文集,作者真誠感謝文集編輯 Patricia Radelet-de-Grave女士同意讓作者將文章收編到本章的第四、五和六部分。

2. 中國古代的數學教育

在人類文明史上，什麼才算是數學的真正開端呢？畫圖？數數？計算？辯論？推理？還是證明？即使這一問題還存在著爭議，相信大家也都同意數學教育——狹義地視為傳授數學技能和知識的活動——是伴隨數學的產生而一起出現的。

中國古代正規學校體制始於夏朝（西元前二十一世紀至西元前十六世紀）後期，約於西元前二〇〇〇年，學校在國家的管理之下，是訓練貴族子弟的場所。在商朝（西元前十六世紀至西元前 1466年）和西周（西元前 1466年至西元前 771年），官學體系變得更加制度化。西元前七七〇年，蠻族入侵，迫使西周遷都，開始了東周時期（西元前 770年至西元前 256年）。這一時期，由於周王朝的軟弱無能，群雄競起，戰亂不斷。這就是持續了五個世紀的春秋戰國時代。衝突與動盪的困擾，使得它是一段動亂而多事的時期。具有諷刺意味的是，從中國歷史上文化發展來看，它也是一段富有生機而繁榮的時期。一方面是官學衰落，另一方面由一些有名學者主持的私學興盛起來（未必有固定場所）。在以後的朝代，這樣的私學以書院為名（有固定場所），逐漸發展成為教育體系中的重要組成部分（在唐朝，書院最初只是一個整理和校勘圖書的官方機構）。關於書院的演變現在已經成為一項龐大的研究課題。然而，由於在文獻中不容易找到關於這些私學的數學課程的蹤跡，我們將不作深入的論述。值得注意的是，由官學和私學構成的雙軌學習體制，在中國持續了兩千年（陳谷嘉、鄧洪波, 1997；丁鋼、劉琪, 1992；趙所生、薛正興, 1985；張正藩, 1985）。

在漢朝（西元前 206年至西元 220年），儒學被尊為最高的國家哲學。因為重視經學的學習，而經學中往往會提及一些數學知識，所以數學還算受人關注。實際上，高等教育課程中，“六藝”包括禮、樂、射、御、書、數（在早期，算術與數字卜卦緊密相關。卜卦指的是“內算”，而我們今天所理解的數學指的是“外算”（劉鈍, 1993, 71頁））。根據二世紀鄭玄的注釋，“六藝”中的“數”進一步分成九章，這與編寫於西元前一〇〇至西元一〇〇年之間的著名數學著作《九章算術》中“九章”的標題沒有太多不同。一九八四年，在挖掘湖北的漢王墓時，發現了《算數書》竹簡，這本書約成於西元前二〇〇年左右，其內容與《九章算術》驚人的相似。這充分表明《九章算術》的內

容比這本書本身更為古老 (彭浩, 2001) 。無論如何，這兩本書的模式，在後來的一千五百年內，成為所有中國數學著作的典範。《九章算術》由分成九章的二百四十六個數學問題組成：(1) 方田；(2) 粟米；(3) 衰分；(4) 少廣；(5) 商功；(6) 均輸；(7) 盈不足；(8) 方程；(9) 勾股。書中先提出問題，給出答案，再給出了一般的方法 (演算法) ，作為同種類型問題的解法。值得注意的是，文本中給出的資料是具體但並非有特殊意義，因而它們實際上是普遍的，這使得這些方法 (演算法) 在本質上是通用的程式。早期的版本中，對這些內容沒有深入的解釋，可能是由教師給予講解。後來的版本中，由不同的學者注釋。這體現了學者認真而刻苦的自學精神，也為後來各代讀者提供了有用的學習幫助。最有名的一位注釋者，是三世紀中期的劉徽，他在前言中寫道“徽幼習《九章》，長再詳覽，觀陰陽之割裂，總算術之根源，探賾之暇，遂悟其意，是以敢竭頑魯，采其所見，為之作注。事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本幹者，知發其一端而已，又所析理以辭，解體用圖，庶亦約而能周，通而不黷，覽之者思過半矣。” (英譯見 Siu, 1993, p.355) 這清楚地表明，為了加強理解，他均衡地運用了嚴格論證和啟發推理的方法。更多例證，讀者可查閱 (Siu, 1993) 。

全面的官學教育制度在隋朝 (581-618) 開始建立，並在唐朝 (618-907) 和宋朝 (960-1279) 得到了進一步鞏固。對於每一門設置的科目，有詳盡的課程計劃，包括大綱和採用的教科書，每科的學生入學名額、教員與管理者的人數，學生入學的標準，也記錄在案。這些科目的考試定期舉行，成功的考生將根據他們在考試中的優秀表現而授予官職。本章第一部分已經說明，我們將只限於討論典籍中關於唐朝官學制度的明算科的記載，這些內容將在第三部分和第五部分討論。

雖然官學教育制度在宋朝得到進一步鞏固與擴展，但明算科中除曆算和天文 (占星術) 課程得到加強之外，其他方面卻被忽略了。後來科舉制度更把明算科取消。在宋朝以後的幾個朝代，明算科一直沒有得到恢復。從十七世紀初開始，通過廣泛地與西方數學的接觸，先在明朝 (1368-1644) 晚期，然後在清朝 (1616-1911) 初期，再在清朝的末期 (即十九世紀中葉) ，中國數學在外國的影響下發展。隨著中國數學

進入現代時期並逐漸與更為“世界性”的數學相融合（“世界性”指的是從事數學工作及研究所依循的方向和風格，與在世界政治及文化領域起著主導作用的國家相同），中國的數學教育與其他大多數（西方的）國家基本上沒有太大區別。關於中國古代數學教育的更多參考，可見陳飛，2002；丁石孫、張祖貴，1989；金諍，1990；李弘祺，1994；李儼，1954-1955；林炎全，1997；劉鈍，1993；馬忠林、王鴻鈞、孫宏安、王玉閣，1991；梅汝荊、李生榮，1992；Siu, 1995；吳宗國，1997；謝青、湯得用，1995；嚴敦傑，1965；趙良五，1991。

讀者可能會注意到，在中國古代，數學知識不只是通過官學體制的管道傳授的。一些數學經典著作的前言中提到，學生可以向師傅甚至向隱士學習，也可以通過自學而獲得數學知識。一些科學史家指出，宗教網路的傳播可能起了相當大的作用（Needham, 1959；Volkov, 1996）。雖然官學制度培養了成千上萬名“數學技術官員（mathocrats）”，成為官方或皇家的天文學家，但幾乎所有在數學史上留名的傑出數學家似乎都是通過其他管道成長的。一位數學史學家曾經列舉了活躍在西元前四世紀到西元十九世紀末期間五十位有名的中國數學家，其中僅有兩位是由官學制度培養出來的（郭世榮，1991）。

結束這一部分之前，讓我們再看一部不同尋常的論著，它也許是中國最早的數學教育論文，是宋朝數學家楊輝在一二七四年寫成的《乘除通變本末》。這部書第一章的引言為《習算綱目》，它對傳統課程大綱進行了重新組織，並列出了一個只需用二百六十天完成的綜合學習時間表。這相當於今天中學數學一千五百小時的現代課程（比對一下，官學制度課程需時七年！將在第三部分再作討論）。以下是該書的一些節錄（英譯見 Lam, 1977），它們都是有趣並富啟發性的，很好地解釋了死記硬背並不等於重複學習，做大量練習與獲得深刻理解也並非不相容。

“加法，乃生數也。減法，乃去其數也。有加則有減。凡且學減，必以加法題答考之。庶知其源，用五日溫習足矣。”（卷1，第1章）

“學九歸，若記四十四句念法，非五七日不熟。今但於《詳解九

章演算法》九歸題“術”中，細看注文，便知用意之隙。而念法用法，一日可記矣。溫習九歸題目，一日。”（卷1, 第1章）

“作一日學一法。用兩月演習題目。須討論用法之源，庶久而無失忘矣。”（卷1, 第1章）

“夫算者，題從法取，法將題驗。凡欲見明一法，必設一題。若遇問題，須詳取用。...或日用定數，當立折變為捷，是皆得其宜也。”（卷1, 第3章）

“題繁難見法理。今撰小題驗法理，義既通。雖用繁題了然可見也。”（卷2）

3。唐朝官學數學課程

當明算被確立為唐朝官學制度的一門學習科目時，中國的數學已經建立起悠久的學術傳統。在七世紀中期，數學家李淳風受詔整理了《算經十書》，該書在六五六年被欽定為算學的官方教科書。《算經十書》由不同年代不同作者編寫的十本著作組成，按年代順序粗略地列之於下：（1）《周髀算經》，西元前一〇〇年；（2）《九章算術》，西元前一〇〇年至西元一〇〇年；（3）《海島算經》，三世紀；（4）《五曹算經》，六世紀；（5）《孫子算經》，四世紀；（6）《夏侯陽算經》，五世紀；（7）《張丘建算經》，五世紀；（8）《五經算術》，六世紀；（9）《緝古算經》，七世紀；（10）《綴術》，五世紀。《綴術》的最初版本在十世紀左右失傳了，宋朝時，它在《算經十書》中的作用被疑為成書於六世紀的《數術記遺》所取代（（1）至（9）這些著作的原文可以在許多參考書中找到，例如，郭書春，1993）。《新唐書》和《唐六典》記載了如何學習並說明學習每書的時間。學生分為兩個專業，為方便起見，本章以縮寫的A和B來表示。專業A的學生學習（1）至（8），即《孫子算經》和《五曹算經》一年，《九章算術》和《海島算經》三年，《張丘建算經》一年，《夏侯陽算經》一年，《周髀算經》和《五經算術》一年。專業B的學生學習（9）至（10），即《綴術》四年，《緝古算經》三年。除了這些書以外，兩個專業的學生還必須學習《數術記遺》和《三等數》（《三等數》寫在六世紀中期或更早時期，但到宋朝已失傳）。七年的學習期間

有定期考試，每年年末舉行歲考。三次沒有通過考試或在算學館中待了九年的學生將被取消其資格。從十四至十九歲的入學年齡來進行判斷，一個算學學生在二十二歲左右參加科舉（更詳細的討論，可見 Siu & Volkov, 1999）。

雖然明算科被列為官學制度中的一門科目，但它的地位較低。例如，據《新唐書》記載，算學專業 A 和專業 B 每年分別招收十五名學生，配有兩名算學博士和一名算學助教。但是在經學課程中，每年招收三百名學生，配有五名博士和五名助教。如果教員的數量和相應的學生人數沒能揭示科目的重要性的話，那麼教員的等級和薪水卻能夠反映這一點。據《新唐書》記載，算學博士是最低級別的官員（三十級），而助教則根本沒有級別。但經學博士有著較高的級別（十一級），連經學助教也有著只是稍微低一點的級別（十七級）！

4。唐朝的科舉

“科舉”是中國的國家考試的專有名詞，顧名思義“科目舉薦”，即通過不同科目的考試，推薦合適的考生（擔任一定的官職）。一些史學家認為隋煬帝頒佈詔令召集舉行國家考試是科舉制度的開始。而另一些史學家認為在六二二年，唐高祖頒佈詔令，任何有資格的考生無需經省級官員推薦也能參加國家考試，這才是科舉制度的開始。科舉最初是富有生命力而又行之有效的制度，為國家挑選人才，它並不考慮考生的社會背景或貴族世襲因素，只看重他們的學業成績。但是，這一制度經歷了長達近十三個世紀的不同朝代，漸漸退化為培養機械式學習和迂腐思想的一種思想束縛。到了末代王朝——清王朝，最後在一九〇五年，大清帝國的皇帝下詔取消了科舉制度（Franke, 1968；金諍，1990；劉海峰，1996；吳宗國，1997；謝青、湯得用，1995；楊學為、朱仇美、張海鵬，1992）。

“中國對世界最重要的貢獻之一，是建立了國家服務管理制度以及這個制度的核心部分，即是從六二二年至一九〇五年實行科舉的考試。”（Kracke, 1947, p.103）事實上，早在十七世紀初，耶穌會教士

利瑪竇 (Matteo Ricci) 在他的日記中稱讚了中國在文學和科學方面取得的成就，也表揚中國人行之有效的學術學位頒授 (Ricci, 1615 / 1953)。伏爾泰 (Voltaire · 即 F.M. Arouet) 在十八世紀中期作了類似的評論：“人們肯定不能想像一個比這更好的政府：所有事情都由互相隸屬的裁判庭來決定，裁判庭的成員需要通過幾次嚴格的考核才能出仕。中國的一切事情都是通過這些裁判庭來管理。” (Voltaire, 1756/1878, p.162) 孫中山於一九一一年創立中華民國，他在《五權憲法》中說：“現在各國的考試制度，差不多都是學英國的。窮流溯源，英國的考試制度原來還是從我們中國學過去的。所以中國的考試制度，就是世界上最早最好的制度。” (Teng, 1942-1943, p. 267) 孫中山甚至創立了“五權分立”的政治學說，將國家權力機關劃分為立法院、行政院、司法院、考試院、監察院。

有關科舉制度(唐朝的)的官方詳細記錄，在某些古代典籍中可以找到，它們主要是：

- 《舊唐書》，941-945；
- 《新唐書》，1044-1058；
- 《唐六典》，738；
- 《通典》，770-801；
- 《唐會要》，961。

清代學者徐松在一八三八年編寫的《登科記考》可以作為輔助的二手資料，它既收集了以上列舉的典籍中許多相關資料的摘錄，也包括不少有趣的資料和軼聞（本節給出的許多軼聞都能在此書找到（徐松，1838-1984））。在西方文獻中，其中一部最早記載唐朝科舉制度的著作是著名法國漢學家 Edouard Biot 寫的，他似乎對官學課程沒有太高的評價。他認為“算學館”這一名字，對這樣初級的學習機構來說是誇大了，他並且認為所採用的教科書“收集的問題大部分是初級的，答案也沒有給出證明”（Biot, 1847/1969, pp. 257, 262）。第一本用西方語言全面記載唐朝科舉制度的著作，是由 Robert des Rotours (des Rotours, 1932) 在一九三二年撰寫的，書內把相關文獻作了相當翔實的翻譯 (Chapters 44-45)。

在《新唐書》中，有一部分是關於選舉和詮敘的，其中記載了國家的兩類考試：（1）每年年初為中央官學與地方官學的在校生（生徒）或不在學校上學的知識青年（鄉貢）舉行的常考；（2）由皇帝頒佈詔令舉行的制考。第二類考試因當時的需要或皇帝的一時興致而舉行。因此涉及更大範圍的專門知識，也有頗為不可思議的科目。從官方記載中能找出許多這類專門考試。這裏僅僅列舉一小部分，有：“博學宏詞科”，“博通墳典達於教化科”，“軍謀宏遠堪任將帥科”，“賢良方正能直言極諫科”，“祥明政術可以理人科”。最有趣的一門考試是“隱居丘園不求聞達科”，從邏輯上說，這是當且僅當一個人不要學位的情況下才被授予這一學位！（事實上，據《登科記考》記載，七九四年，有人拒絕接受這一學位，終於學位是缺席頒授！）第一類考試最初有七門科目：秀才，明經，俊士，進士，明法，明書和明算。秀才很快被取消，而進士後來成為最受重視的科目。據《通典》記載，到七五二年止，“進士大抵千人得第者百一二；明經倍之，得第者十一二。”當時的資料表明，在五十歲考上進士（也許經過許多次重複的努力）仍是了不起的，而在三十歲考上明經已經算是太老了。關於明算科難以找到類似的資料或評論，這也再一次表明“明算科”在各種科目中地位較低，僅與“明書”（即“書法”）同等。從“國立大學”註冊的學生數目更能看出這一點。唐朝的高等教育機構是按等級劃分的：最高的是國子學，它只招收某級別以上的皇家貴族子弟；其次是太學，它招收地位稍低的貴族子弟，再次是四門學，它除了招收官員子弟外，也招收少量庶民的子弟。律學、書學和算學這三類學校只招收職位低的官員的子弟和庶民的子弟。根據《新唐書》記載，唐朝初期，國子學有學生三百名，太學有學生五百名，四門學有學生一千三百名，律學有學生五十名，書學有學生三十名，算學有學生三十名。有一段時期，約有八千名學生在全國高等教育機構（包括省級專科學院在內）接受教育，其中也有從鄰國來的留學生。在唐朝，國家高等教育體制已經很完整了。

每年高等教育體制的大事——科學考試——對許多人而言是一段痛苦的經歷。唐朝的一些作家描述了考生帶著文具、食物和水、蠟燭與木炭（為準備用餐與取暖用），排成長長的隊伍，站在帶刺的樹籬（類似現代帶刺的鐵絲網）圍成的考試管轄區的入口處等待，經過門衛點名、

搜身後進入考試的小隔間的情景：為了防止考生隱藏書稿，他們被禁止穿厚衣服，只能穿著單薄衣裳在寒冷的天氣中直打哆嗦。在長達許多小時的考試中，考生只能在小隔間中活動，自己準備食物，處理個人衛生。考試失敗是普遍的事。考試失敗之後，這段痛苦的經歷還得重複。年復一年地繼續。八六七年獲得進士的韋承貽，曾溜進禮部的南宮（掌管考試事務的辦事處），在牆上作了一首詩：“白蓮千朵照廊明，一片昇平雅頌聲，才唱第三條燭盡，南宮風景畫難成”。這首語帶無奈的詩，生動地描述了那些刻苦的考生在三根照明蠟燭耗盡前爭分奪秒完成答卷的情景。

現代的考試無疑比以前少了許多痛苦，但如果不指出現代一些完善的考試方法早在一千年前已經存在的話，便對唐朝的祖先有點不公平。七五九年，主考官李揆說：“大國選士，但務得才，經籍在此，請恣尋檢”。這也許是最早的開卷考試了！七四二年，主考官韋陟說：“以一場之善，登其科目，不盡其才。...仍令舉人自通所工詩筆，先試一日，知其所長，然後依常式考核。”這可能是最早用專題研習報告和綜合學業記錄（“行卷”和“納卷”）來評價考生的案例了！著名的“行卷”例子是詩人白居易向主考官顧況所交的作品：八〇〇年，白居易以罕有的年輕歲數——二十七歲——及第進士，他的“行卷”就是傳誦至今，廣為流傳的一首詩：“離離原上草，一歲一枯榮。野火燒不盡，春風吹又生...”（英譯見袁行霈、許淵沖，2000）

5. 唐朝科舉中的明算科

在科舉的明算科專業 A 或 B 中，有兩種類型的考試題。《新唐書》這樣描述第一類問題：“錄大義本條為問答。明數造術。詳明術理。”對於專業 B 的試題，還附加註腳：“無注者合數造術。不失義理。”（對這條註腳嘗試作出一種解釋，見 Siu & Volkov, 1999）我們在第六部分將會詳細討論這類問題。第二類問題稱為帖讀，是測試考生是否熟讀經書。從《數術記遺》或《三等數》中取出一行，再用紙貼蓋住三個字，考生需要說出是哪三個字。這類問題類似現代的填充題。值得注意的是，《數術記遺》是一本只有九百三十四個字的短書，考生不

費太多力氣就能記住（更不用說以七年時間來記它！）。挑選這本書用來作為帖讀很可能有其他方面的原因，但那是另一篇文章的主題了（見 Volkov, 1994, 關於《數術記遺》內容的有趣討論）。《三等數》到了宋朝（960-1279）已經失傳了，我們只能猜測，它可能是類似《數術記遺》的一本書。

另外，實施帖讀有一個原因。六八一年，主考官劉思立在所有科目實施帖讀，是為了糾正考生普遍存在的不良學習習慣。一些考生為了通過考試，只學習以往考題的“標準答案”，而不學習原著，帖讀迫使考生去閱讀（至少一些）原著。然而，考試畢竟是考試，易於被濫用。帖讀變得越來越困難和不合理，它測試晦澀的短語，擬題者甚至故意設置陷阱來迷惑考生。為了通過這些不合理的考試，考生的應付手法是收集晦澀的短語並記住它們。於是，本來鼓勵考生讀原著這樣值得讚揚的目的完全被歪曲了。七二八年，國家下詔：經書的摘錄必須設置在合理的範圍內。從企圖以考試指導課程發展方面而言，這是一個值得汲取的教訓。

6。一些重建的試題

因為沒有任何尚存的考題可尋，我們將參考科舉中關於明算科考試的說明和解釋，重建一些考題以提供證據支援本文的觀點：唐朝的數學課程並非是初等的，也並非是通過死記硬背的方式學得的。很難想像，一群經過挑選的年輕人花費七年的黃金歲月，只是囫圇吞棗地逐字記憶數學著作，僅僅為了最後在科舉中將答案背出來而已。如果讀者認為，在歷史研究中不能依靠想像，作者在此引用英國歷史哲學家 Collingwood (1946, p.202) 提出的研究歷史的一種廣泛（但稍具爭議）觀點，插入一個（稍帶歉意？）自辯，“歷史就是活著的心靈自我認識...。因為歷史並不包含在書本或文獻中，它僅僅作為當前的一種興趣和追求，活在評論這些文獻的歷史學家的心靈中，通過歷史文獻的評述，歷史學家再次體驗其所探究的心靈的狀態。” Collingwood 和應了義大利哲學家 Croce (1919/1920, p.19) 提出的觀點：“歷史是活的編年史，編年史是死的歷史，歷史是當代的歷史，編年史是過去的歷史；

歷史主要是一種思想活動，編年史主要是一種意志活動。一切歷史當其不再是思想而只是用抽象字句記錄下來時，它變成了編年史，儘管那些字句一度是具體及感人的。”

舉例之前，先看看一本典型的教科書，領會作者是如何做數學的，對我們的討論有幫助。有哪本書比得上偉大的著作《九章算術》呢？連同三世紀數學家劉徽所加的注釋，這本教科書為本文的論點提供了更充分的“間接證據”。

《九章算術》的第五章給出了多種立體圖形的體積公式，特別是，問題十七是一個墓穴入口的通道（羨除）的體積公式。用數學語言描述，羨除是一個三面為梯形和兩側面為三角形的幾何體，這三個梯形的平行對邊的長度分別為 a, b ； a, c ； b, c ，頂部梯形的高為 l ，羨除深 h （見圖 1）。

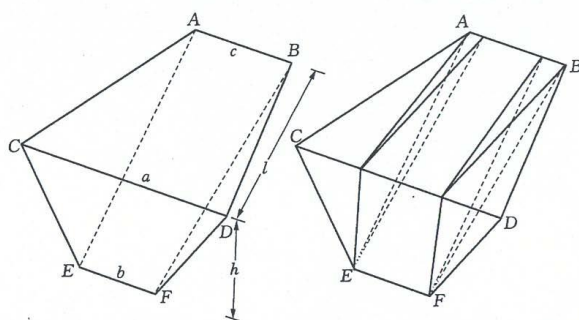


圖1

書中給出了羨除的體積公式 $V = \frac{1}{6}(a+b+c)hl$ （ a, b, c 在書中乃具體數值，但實際上它們的數值並沒有特殊意義，是具有普遍性的）。劉徽在注釋中解釋了如何算出體積。他將羨除剖分成一些標準的幾何形狀，如特殊的三棱柱（塹堵）、特殊的四面體（鱉臑），或者以正方形為底的棱錐（陽馬）。如果你也試著做，便會發現剖分的方法因 a, b, c 之間的大小關係不同而異。例如若 $a > c > b$ ，則可將其剖分為兩個體積為 $\frac{1}{12}(a-b)hl$ 的特殊類型的四面體、兩個體積為 $\frac{1}{12}(c-b)hl$ 的特殊類型的四面體和一個體積為 $\frac{1}{12}bhl$ 的三棱柱（見圖 1）。它們的體積之和為

$\frac{1}{6}(a+b+c)hl$ 。若 $a > b > c$ ，則可將其剖分為兩個體積為 $\frac{1}{12}(a-b)hl$ 的特殊類型的四面體，兩個以正方形為底、體積均為 $\frac{1}{6}(b-c)hl$ 的棱錐和一個體積為 $\frac{1}{2}chl$ 的三棱柱。它們的體積之和也是 $\frac{1}{6}(a+b+c)hl$ 。事實上，劉徽在他的注釋中列舉了除“ $b > a = c$ ”之外的所有八種不同情形下羨除的剖分方法。計算因剖分方法的不同而異，但其基本思想則是一樣的。考試大概要求考生作出與此相類似，關於其他幾何形狀的面積或體積公式的解釋，其中幾何形狀各邊的長度可能也是一些具體數值，只要考生掌握其基本思想，這樣的試題的要求是合理的。

同章中，問題十是一個關於以正方形為底的亭子（方亭）的體積問題（見圖 2）。

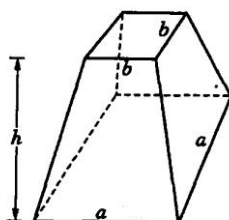


圖 2

用數學語言描述，方亭是一個以正方形為底的截棱錐。如果 a, b 分別是方亭下、上底的邊長， h 是方亭的高，則方亭的體積為 $V = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab)h$ 。劉徽又一次在他的注釋中闡述了怎樣巧妙地組合一些標準形狀的幾何體模塊（他稱為棋）得到方亭，從而得到方亭的體積公式。由三種棋能組成方亭：邊長為 a 、體積為 a^3 的立方體（立方）；底面是邊長為 a 的正方形，另一條長為 a 的棱垂直於底面的棱錐，其體積為 $\frac{1}{3}a^3$ （陽馬）；底面是腰長為 a 的等腰直角三角形，高為 a 的三棱柱，其體積為 $\frac{1}{2}a^3$ （塹堵）。劉徽觀察到截棱錐可由一個立方、四個陽馬和四個塹堵組成（細心的讀者會發現這裏需要 $h = b$ ，讓我們可以運用標準形狀的幾何體模塊）。劉徽接著觀察到一個立方可以組成體積為 b^2h 的立方體塊，一個立方和四個塹堵可組成一個體積為 abh

的長方體塊，一個立方、八個塹堵和十二個陽馬可組成一個體積為 a^2h 的長方體塊（細心的讀者會發現，這裏要求 $h=b$ 和 $a=3b$ ，使得每個角是由三個陽馬組合而成的立方體）。

在問題十五中，劉徽進一步闡述了怎樣用無窮小分割方法推導出以長方形為底，有著任意高的更一般的四棱錐的體積公式（Wagner, 1979）。總而言之，三個立方、十二個塹堵和十二個陽馬的體積之和為 $b^2h+abh+a^2h$ ，因而截棱錐的體積是 $\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)h$ （見圖 3）。

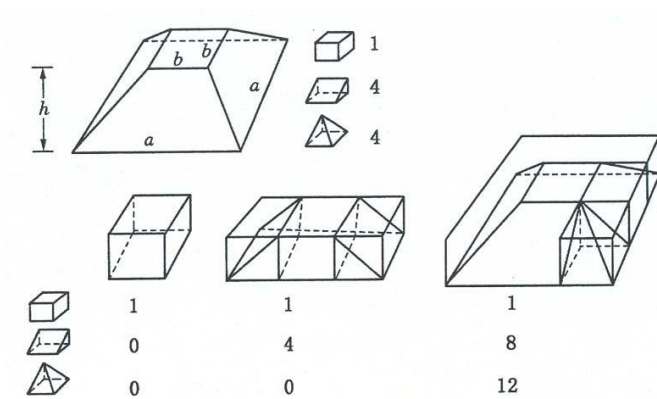


圖 3

劉徽還用另一種剖分方法給出了截棱錐的另一體積公式

$$V = \frac{1}{3}(a-b)^2h + abh \quad (\text{見圖 4})。$$

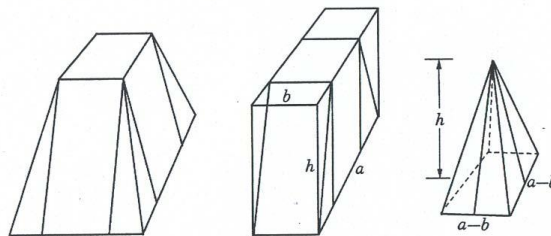


圖 4

在第二種方法中，不必假設 $h=b$ 和 $a=3b$ ，但它只適用於上、下底均為正方形的棱臺。

這裏給出一道模擬題：計算高為 h 、下底和上底分別是邊長為 a_1, a_2 和 b_1, b_2 的長方形 ($a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$) 的亭子的體積。如果理解了劉徽的無窮小分割方法，考生稍加變動就能得到該問題的答案，作為練習這個留給讀者 (讀者也可以用當今學生都熟悉的方法來解決該問題，即用相似三角形的方法)，答案是 $V = \frac{1}{3} \left[a_1 a_2 + b_1 b_2 + \frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1) \right] h$ 。如果考生僅僅記住課本上的公式而不加以理解，很難想到這一正確公式。這也許就是所謂的“造術”(構造一個(新的)演算法)的意義。而且，考慮到考生在以後的職業生涯中很可能會遇到他們在課本中所學問題的變式(如參數改變)，對他們作這樣的要求也是合理的。

7. 科舉真的對學習這麼有害嗎？

科舉制度有著奇怪的矛盾現象，既被描述為一種豐富的文化遺產，又被描述為中國歷史上一種負面桎梏。科舉的長短優劣，至今仍是一個廣泛引起爭論的主題(金諍，1990；劉海峰，1996)。這裏，我們不想涉足另一場冗長的爭論，而是“放大”這一制度中較積極的部分，以抗衡“中國古人只是通過機械記憶和勤奮刻板訓練來學習數學”這一傳統觀念。可惜的是，科舉的積極部分被它的消極部分掩蓋，這一制度在明朝和清朝的演變使消極作用更顯突出。

奇怪的是，通常人們仍然認為儒家的學習等同於死記硬背的學習和一味順從的學習，儘管聖賢早已有相反的論述。《論語》(西元前五世紀)中說：“學而不思則罔，思而不學則殆。”《中庸》(西元前六世紀至西元前五世紀)中說：誠之者，擇善而固執之者也。博學之，審問之，慎思之，明辨之，篤行之。”在宋代大儒朱熹(1130-1200)的書中，我們也可以讀到“讀書無疑者，須教有疑，有疑者，卻要無疑，到這裏方是長進。”(卷11，151頁)人們能稱此為死記硬背的學習嗎？是一味順從的學習嗎？朱熹的著作讀得越多，我們也許對西方觀察者所指的“死記硬背”學習原來是怎樣一回事理解得更深入。朱熹說：“大抵觀書，先須熟讀，使其言皆若出於吾之口，繼以精思，使其意皆若出於吾之心，然後可以有得也。然熟讀精思既曉得後，又須疑不止如

此·庶幾有進·若以為止如此矣·則終不復有進也。”（卷 11·135 頁）朱熹進一步指出：“學便是讀·讀了又思·思了又讀·自然有意·若讀而不思·又不知其意味；思而不讀·縱使曉得·終是惴惴不安... 若讀得熟·而又思得精·自然心與理一·永遠不忘。”（卷 10·138 頁）這段話明顯地闡明了反覆學習和機械學習的區別·當代的研究者基於這種區別解釋了亞洲學習者悖論（Biggs, 1996；Marton, Dall'Alba & Tse, 1996）。

另一方面·在十九世紀伴隨著工業革命出現的西方現代教育·開始即強調 3Rs——讀、寫、算·在一八六二年·英國教育部 Robert Lowe 簽發的一部法規中·對每個 R 的標準作了明確規定（例如·關於“讀”的標準 I：朗讀單音節詞；“寫”的標準 II：以整齊書法臨摹一行印刷字體；“算”的標準 IV：計算一則貨幣題）（Curtis, 1967, Chapter 7）。狄更斯（Charles Dickens）在一八五四年寫的小說《艱難時世》·開頭借 Coketown 城的 Gradgrind 先生之口說話·是對當時英國強調機械式學習的生動描述（固然·小說的話帶有誇大的諷刺意味）：

“現在·我需要的是‘事實’·我教給學生們的只是‘事實’·惟獨‘事實’是生活之所需...這是我教育自己孩子的原則·也是我教育這些孩子們的原則·先生·堅持‘事實’！”（Dickens, 1854/1995, p.9）

關於科舉的準備·朱熹也有以下觀點：

“士人先要分別科舉與讀書兩件·孰輕孰重·若讀書上有七分志·科舉上有三分·尤自可；若科舉七分·讀書三分·將來必被它勝卻。”（卷 13·191 頁）

“舉業亦不害為學·前輩何嘗不應舉·只緣今人把心不定·所以有害·才以得失為心·理會文字·意思都別了。”（卷 13·194 頁）

“嘗論科舉云：非是科舉累人·自是人累科舉·若高見遠識之士·讀聖賢之書·據吾所見而為文以應之·得失利害置之度外·雖日日應舉·亦不累也·居今之世·使孔子復生·也不免應舉·然豈能累孔子邪！”（卷 13·194 頁）

八百多年以前，中國的聖賢已經知道考試的主要弊端並非來自考試本身，而是來自考試所帶來的利害關係！

假設不靠通過機械學習以求考試及格，那麼考試可以帶來哪些益處呢？讓我們首先對中國古代的考試形式與布魯姆（Bloom, 1956）的現代評估理論作一下比較。現代評估觀點既包括形成性評估，也包括總結性評估，但中國古代的考試是為了選拔，所以只關注後者的作用。布魯姆的認知目標的六級分類與中國古代考試的四種不同類型的問題是一致的，即：（1）帖讀以考查知識；（2）短的問題以考查理解與應用；（3）長的問題（關於當代時事）以考查分析與綜合；（4）作文與作詩以考查評價。（劉海峰，1996，240頁）

有了多種多樣的目標，考試即使作為總結性評估過程，它對學生和教師都能產生有益的影響。對學生而言，它有利於鞏固知識，加強理解，製定學習計畫，判斷學習重點，發展學習策略，培養學習動機和自我提升意識。對教師而言，除了上述提到的優點之外，考試還可以用來檢查學生的學習進度，判斷學生消化吸收了多少，評估教學是否有效。從這種意義上來說，“素質教育”與“應試教育”不必是對立的。Crooks說：“作為教育者，我們應該在評估中確保對我們認為是最重要的技能、知識和態度給予恰當的重視。”（Crooks, 1988, p.470）從總結性評估的角度看，考試是一種“不得已之惡”。但從形成性評估的角度看，考試是學習過程的有用組成部分。而且，嚴格地區分總結性評估和形成性評估是一種錯誤的二分法，重要的是不要本末倒置，讓評估指揮了教育（C. Tang & Biggs, 1996, p.159）。

中國皇朝的考試制度，儘管具有良好的初始意願和長達一千二百八十七年的歷史，但最終走向了消亡，這是一個值得汲取的教訓。

參考文獻：

- Biggs, J. B. (1996). Western misperceptions of the Confucian-heritage learning culture. In D. A. Watkins & J. B. Biggs (Eds.), *The Chinese Learner: Cultural, psychological and contextual influences* (pp. 45-67). Hong Kong: Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong; Melbourne, Australia: Australian Council for Education Research.
- Biot, E. (1969). *Essai sur l'histoire de l'instruction publique en Chine, et de la corporation des lettrés, depuis les anciens temps jusqu'à nos jours: Ouvrage entièrement rédigé d'après les documents chinois* [Essay on the history of state education and the literati in China from ancient time to the present: Work written entirely depending on Chinese documents]. Paris: Benjamin Duprat. (Reprinted, 1847, Taipei: Chéng Wen Publ. Co.)
- Bloom, B. S. (Ed.) (1956). *Taxonomy of educational objectives, The classification of educational goals, handbook I: Cognitive domain*. London: Longman.
- Cai, J. (1995). *A cognitive analysis of U.S. and Chinese students' mathematical performance on tasks involving computation, simple problem solving and complex problem solving*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

陳飛(2002)唐代試策考述. 北京：中華書局

陳穀.鄧洪波(1997). 中國書院制度研究. 杭州：浙江教育出版社

- Collingwood, R. G. (1946). *The idea of history*. Oxford: Clarendon Press.
- Croce, B. (1919/1920). *History: Its theory and practice* (translated from the 2nd edition in Italian). New York: Russell & Russell.
- Crooks, T. J. (1988). The impact of classroom evaluation practice on students. *Review of Educational Research*, 58, 438-481.
- Curtis, S. J. (1967). *History of education in Great Britain* (7th ed.). London: University Tutorial Press.
- des Rotours, R. (1932). *Le traité des examens, traduits de la Nouvelle histoire des T'ang* [Treatise on examinations, translated from 'New History of the Tang Dynasty']. Paris: Librairie Ernest Leroux.
- Dickens, C. (1995). *Hard times*. London: Penguin Books. (Original work published 1854)
- 丁鋼.劉琪.(1992). 書院與中國文化. 上海：上海教育出版社
- 丁石孫.張祖貴(1989).數學與教育. 長沙：湖南教育出版社.
- Franke, W. (1968). *The reform and abolition of the traditional Chinese examination system*, Cambridge: Harvard University Press.
- Gardner, D. K. (1990). *Learning to be a sage: Selections from the conversations of Master Chu, Arranged topically*. Berkeley: University of California Press.

- 郭書春. (Ed.) (1993). 中國科學技術典籍通匯(數學卷)] (1-5卷).鄭州：河南教育出版社.
- 郭世榮. (1991).論中國古代的國家天算教育. 李迪 (Ed.),數學史研究文集 (第二卷2, pp. 27-30).呼和浩特：內蒙古大學出版社.
- 金靜. (1990).科舉制度與中國文化. 上海：上海人民出版社.
- Kracke, E. A., Jr. (1947). Family vs merit in Chinese civil service examinations under the empire. *Harvard Journal of Asiatic Studies*, 10, 103-123.
- Lam, L. (1977). *A critical study of the Yang Hui Suan Fa*. Singapore: University of Singapore Press.
- Legge, J. (1960). *The Chinese classics, Volume I: Confucian analects, the great learning, the doctrine of the mean* (3rd ed.). Oxford: Clarendon Press. (Reprinted, 1893, Hong Kong: Hong Kong University Press.)
- Leung, F. K. S. (2001). In search of an East Asian identity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 35-51.
- 李弘祺(1994)宋代官學教育與科舉臺北：聯經出版社
- 李儼. (1954-55).中算史論叢(Rev. ed.). 北京：科學出版社.
- Lin, Y. (1997).中國數學課程的演變. 數學傳播, 21(3), 31-44.
- 劉鈍 (1993).大哉言數. 瀋陽：遼寧教育出版社.
- 劉海峰 (1996).科舉考試的教育視角.漢口：湖北教育出版社.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

馬忠林.王鴻鈞.孫宏安.王玉閣. (1991).*數學教育史簡編*. 南寧：廣西教育出版社.

Marton, F., Dall'Alba, G., & Tse, L. K. (1996). Memorizing and understanding: The keys to the paradox. In D. A. Watkins & J. B. Biggs (Eds.), *The Chinese learner: cultural, psychological and contextual influences* (pp. 69-83). Hong Kong: Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong; Melbourne, Australia: Australian Council for Education Research.

梅汝莉, & Li, S. (1992).*中國科技教育史*. 長沙：湖南教育出版社.

Needham, J. (with the collaboration of L. Wang). (1959). *Science and civilization in China, Volume 3: Mathematics and the sciences of the heavens and the earth*. Cambridge: Cambridge University Press.

彭浩(2001).*張家山漢簡《算數書》注釋*. 北京：科學出版社.

Ricci, M. (1953). *China in the sixteenth century: The journals of Matthew Ricci, 1583-1610* (L. J. Gallagher, Trans.). New York: Random House. (Original work compiled by N. Trigault, 1615)

Shen, K., Crossley, J. N., & Lun, A. W. C. (1999). *The Nine Chapters on*

- the mathematical art: Companion and commentary*. Oxford: Oxford University Press.
- Siu, M. K. (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's Commentary on Jiu Zhang Suan Shu. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 345-357.
- Siu, M. K. (1995). Mathematics education in ancient China: What lesson do we learn from it? *Historia Scientiarum, 4*(3), 223-232.
- Siu, M. K. (2001). How did candidates pass the examination in mathematics in the Tang Dynasty (618-907)? — Myth of the "Confucian-Heritage-Culture" classroom. In P. Radelet-de Grave (Ed.), *Actes de la troisième université d' été européenne sur l' histoire et l' épistémologie dans l' éducation mathématique* [Proceedings of the third European Summer University on the history and epistemology of mathematics educations] (pp. 320-334). Louvain-la-Neuve/Leuven: Université Catholique de Louvain/Katholieke Universiteit Leuven.
- Siu, M. K., & Volkov, A. (1999). Official curriculum in traditional Chinese mathematics: How did candidates pass the examinations? *Historia Scientiarum, 9*(1), 85-99.
- Stevenson, H. W., & Stigler, J. W. (1992). *The learning gap: Why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education*. New York: Simon & Schuster.

- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: Free Press.
- Tang, C., & Biggs, J. B. (1996). How Hong Kong students cope with assessment. In D. A. Watkins & J. B. Biggs (Eds.), *The Chinese learner: Cultural, psychological and contextual influences* (pp. 159-182). Hong Kong: Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong; Melbourne, Australia: Australian Council for Education Research.
- Teng, S. (1942-43). Chinese influence on the Western examination system. *Harvard Journal of Asiatic Studies*, 7, 267-312.
- Volkov, A. (1994). Large numbers and counting rods. *Extrême-Orient, Extrême-Occident*, 16, 71-92.
- Volkov, A. (1996). Science and Daoism: An introduction. *Taiwanese Journal for Philosophy and History of Science*, 5(1), 1-58.
- Voltaire (F. M. Arouet). (1878). *Oeuvres complètes de Voltaire, t.13* [Complete works of Voltaire, Vol. 13]. Paris: Garnier Frères. (Original work published 1756)
- Wagner, D. B. (1979). An early Chinese derivation of the volume of a pyramid: Liu Hui, third century A.D. *Historia Mathematica*, 6, 164-188.
- Watkins, D. A., & Biggs, J. B. (Eds.) (1996). *The Chinese learner: Cultural, psychological and contextual influence*. Hong Kong:

Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong; Melbourne, Australia: Australian Council for Education Research.

Watkins, D. A., & Biggs, J. B. (Eds.) (2001). *Teaching the Chinese learner: Psychological and pedagogical perspectives*. Hong Kong: Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong; Melbourne, Australia: Australian Council for Education Research

Wong, N. Y. (1998). In search of the "CHC" learner: Smarter, works harder or something more? In *ICMI-EARCOME Proceedings* (Vol. 1, pp. 85-98). Cheongju: Korean National University of Education.

吳宗國(1997).唐代科舉制度. 瀋陽：遼寧大學出版社.

謝青& Tang, D. (Eds.) (1995).中國考試制度史. 合肥：黃山書社.

徐松. (1984).登科記考. 北京：中華書局(原版於 1838)

袁行霈.許淵沖，(2000)新編千家詩。北京：中華書局

Yan, D. (1965).中國數學教育簡史. 數學通報, 8, 44-48; 9, 46-50.

楊學為.朱仇美.張海鵬(1992).中國考試制度史資料選編. 合肥：黃山書社.

Zhang, Z.-F. (1985).中國書院制度史略. 南京：江蘇教育出版社.

Zhao, L. (1991). *A comparative study of the history of mathematics in the Oriental and Western worlds* [In Chinese 中西數學史的比較], Taipei: Commercial Press.

Zhao, S., & Xue, Z. (1995). 中國歷代書院志 (第16卷). 南京：江蘇教育出版社.

周東明(1990). 《習算綱目》與楊輝的數學教育思想. 華中師範大學學報 (自然科學版), 24(3), 396-399

[本文原以英文寫成，是 L.H. Fan, J. Cai, N.Y. Wong, S. Li 編的 *How Chinese Learn Mathematics: Perspectives From Insiders*, World Scientific, 2004，書內第六章，131 – 150 頁。在 2005 年江蘇教育出版社把全書翻譯成中文本，名為《華人如何學習數學》，此章的譯者是彭愛輝。亦載於蕭文強：《心中有數》，九章出版社, 2009 年，170-194；大連理工大學出版社，2010 年，223-253。]