誰需要數學史

蕭文強
（香港大學數學系）
原載：《數學通報》（1987）第四期 42-44頁

“誰需要數學史？”和“誰需要數學史！”表明了兩種不同的態度，前者意味開誠的探討，後者意味既定的否定看法。也許持後一種態度的朋友比較多，下文將討論其中的原因，但爲了更好討論前一個問題，我們必須先弄清楚這裡用“數學史”一詞，指的是什麼？或者這樣說，當你聽到“數學史”這個詞，你會想起什麼？人物？他們的工作？誰人何時發現什麼？事件發生的始末？小故事？……

固然，上述種種都是數學史的一部份，但遠非全部。如同歷史並非單單是一連串名字和一系列大事年表，而是包括發生這些事件的前因後果，始末詳情、還有這些事件與人類其它文化領域的相互影響，數學史亦復如是；它包括數學知識的演變、創造這些知識的人、產生這些人和這些知識的客觀條件、還有這些知識的社會作用和對文化的影響。或者讀者會問：“那不是數學本身嗎？”對的，十八世紀德國文豪歌德(Göthe)說過：“一門科學的歷史就是那門科學本身。”我常有個信念，數學史就是數學本身。不過，如果我們不加按語便說一句這樣的話，是既籠統也是不公平的，下文便是對這句話的分析。在這裡，我也應該先向數學史工作者打個招呼，這裡用“數學史”一詞，也跟專研數學史的朋友心目中想像的不完全一樣，但當然是有密切關聯，而且在很大程度上它倚靠數學史工作者的研究成果。大家的目標是相同的，只是工作方法與著眼點有別而已。說得通俗一點，我不是以一個數學史工作者的身份說話（我不是專研數學史的人），我是以一個對數學史極感興趣的數學教師的身份說話。不論是原始文獻或第二手資料、史實羅列或深入研究成果，數學評述或小故事和傳記，這些都是內容豐富的營養品，值得我們學習、吸收、消化、運用和傳授的。當然，一個主要的問題是：“它們眞的能對學習數學和教授數學起作用嗎？”

最常碰到的消極反應可分爲兩種：（1）“我要教的是現代人用的數學，我何需理會古代人怎樣做呢？溯本尋源有什麼用？陳年舊蹟是用來點綴的古董吧，多提也沒意思。即使你說從數學史能追尋數學的本質和意義，那對我又有什麼關係？我只想教好數學，管它什麼哲學呢？”（2）“即使我承認數學史既有趣又有益，我可無此閑情逸致運用它，因爲面對一大群學生，單單要使他們弄懂課程範圍規定的項目已夠花時間了，還談什麼數學史？”這兩種消極反應貌似無關，實則相連，它們反映了同一件事，容許我過份簡化地一言以蔽之：症結所在是我們只強調了數學教育的目標之一，即技術內容。扼要地說，數學教育的目標是（1）思維訓練（2）實用知識（3）文化修養，三者應有適當的平衡。相應地，數學素養可分爲（1）才（2）學（3）識這三個方面，但很多時候對課程設計卻只顧及“才”與“學”（實際做起來，有時只注重“學”，這一點姑且不論），絕少顧及“識”。當然，“識”必須聯系“學”，數學史的主要作用，就是在於增進個人的數學“學識”了。要達到這個目的，最好採用縱橫看法，縱是追溯數學概念和定理的來龍去脈，橫是探討

數學的本質和意義。(關於上述觀點的詳細論述，請參看蕭文強，“數學・數學史・數學教師”，《抖擻》第53期，1983年7月，67-72頁。)

在小學、中學以至大學的各門學科中，數學享有很獨特很奇怪的一席位。人人公認數學重要、基本、有用、必修；但數學也是普遍被視爲枯燥、乏味、困難、抽象、與生活不相干，而且是唯一“有理由”學不好的一科！總的來說，數學是最不爲一般人了解、最受一般人誤解和冷落、卻人人公認沒它不行的一科！這種現象奇怪嗎？細想一下，卻又並不是太奇怪，原因是在學校裡我們側重了數學的技術內容，把它作爲一門技能、一種工具來講授。這樣做固然照顧了“學”，也或許包括了“才”，可惜卻欠缺了“識”。我自己是一位數學教師，自然明白爲什麼會這樣做，在某種程度上我也同情這個做法，雖然我認爲那不是令人滿意的做法。我們這漾做，是要在規定的時間內傳授一定份量的知識，用一種表面看來是清晰利落的手法迅速地教懂學生這套積累千年人類智慧的特殊語言 — 數學，這樣做像是最有效的。至少，從考試成績看，好像確是有效。就我的個人見聞舉例，香港中學畢業統考各科中數學科的合格率相當高，而且平均分數也偏高。又最近第二屆國際數學教學研究報告書顯示，在二十多個國家或地區當中，香港中學生的數學水平比別的地區爲高。但這些是否說明了我們的數學教育成功呢？是否值得我們沾沾自喜呢？我個人對此有所保留，甚至感到困惑，因爲在我教過的學生當中，只有少數對數學有相當興趣，也只有少數成績不俗，大部份若非厭惡害怕數學，便是得過且過。是不是爲了使學生獲得技能，我們在技術內容方面要求過高，以致犧牲了別的方面，而付出的代價，是那些不能在短期內以測試方式量度的品質呢？側重技術內容，雖然傳授了知識，卻掩蓋了數學作爲人類文化活動的面目。學生不易了解數學有它的生命和發展，不易了解數學有它的過去和它的將來，學生容易把數學看成是一堆現成的、完美無誤但僵硬不變的公式和定理，是單純技巧的堆砌，是純粹邏輯的推導。於是，難怪除了少數學生給它吸引過去，其餘大部份學生若非厭惡害怕數學，便是對它漠然視之。從廣義的教育觀點看，這是一個很大的失敗。近代哲學家懷德海（Whitehead）說過：“文化修養包含思維活動與對美和善的感受，而並非單單零碎的知識。僅僅擁有知識的人是天下間最沒用的討厭傢伙，我們的目標在於培養既具文化修養又具某種專業知識的人。”(懷德海，《教育的目的》，1929)

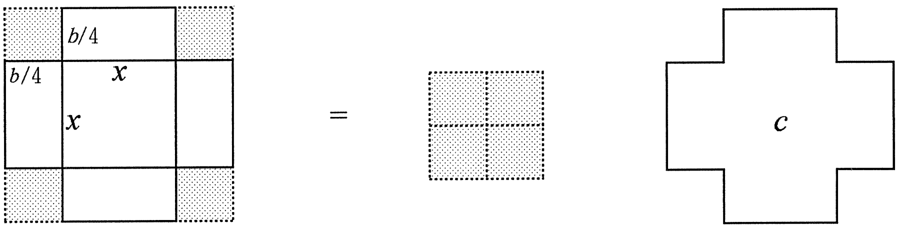
一定有些人不是這樣看待教育的，有人會說：“爲什麼我需要讀二次方程解的公式？你在街上走，何曾碰上過二次方程？爲什麼我需要知道三角形的內角和是180°，那並不會改善我的生活？只有五種正凸多面體與我何干？有五十種還不是一樣嗎？”碰到持這樣極端態度的人，自是無話可說了。同樣的問題也適用於別的科目：爲什麼要學歷史？爲什麼要學音樂？爲什麼要學文學？更進一步，爲什麼要教育？爲什麼要文化？如果我們對後一個問題的答覆也是否定，便是對教育的價值和對知識的尊重完全失卻信念了。然而回顧歷史，從古至今歷史上的進步抑或後退，主要決定於民智的開發抑或閉塞，而民智的開發，端視乎教育。假如我們還沒對教育和文化失卻信念，讓我們欣賞一段美國數學家克萊因（Kline）的話：“數學是人類最高超的智力成就，也是人類心靈最獨特的創作。音樂能激發或撫慰情懷，繪畫使人賞心悅目，詩歌能動人心弦，哲學使人獲得智慧，科技可改善物質生活，但數學卻能提供以上的一切。”(克萊因，<數學 — 必然性的喪失>，1980)但是，在目前的課程裡，有多少學生能認識到這一點呢？要使學生認識到這一點可非易事，甚至是吃力不

討好的事，但只有身爲教師才能肩負這個任務，在日常教學上滲透這種文化觀點和歷史眼光，讓學生通過事例自行欣賞數學的文化成份。一個數學教師就像一個獨奏表演者，憑著自己的理解、領會和功力去演繹音樂作品。但要演繹得美妙，表演者本人必須先了解作品。所以不論你喜歡也好，不喜歡也好；自覺也好，不自覺也好；你對數學的看法一定流露反映於教學中。這說明了數學本質的探討雖是哲學上問題，卻並非與日常教學毫不相干的。一個把數學看成單單是工具的教師，他只會給出大量公式和刻板的例題；一個把數學看成單單是邏輯體系的教師，他會依循一種有條不紊卻異常乏味的“定義—公理—定理—系”方式去教授；一個把數學看成單單是智力遊戲的教師，他會偏愛刁鑽難題而忽視基本工夫；一個認爲數學除了包含以上各方面之外還有更豐富內涵的教師，他的教學風格自是有別。

以下我打算通過一段教學經驗來支持我的論點。在這個例子裡，限於篇幅，我不能把有關的數學史料逐一細述，反正在一般數學“通史”書本中能找得著，我只打算勾劃一個輪廓，在適當的地方加插一些教學上的體會。

十一年前我在美國一所大學裡教一門叫 Pre-Calculus 的課，實則是“補教”性質的代數課，內容相當於中學代數的課程範圍。學生大都聽過“代數”這個詞，但當我問他們：“什麼叫做代數？”他們只能含糊以對。有些說代數是那些包含 a, b, c, x, y, z 的式子，有些說代數是把那些 a, b, c, x, y, z 加減乘除，有些只記得那道二次方程解公式，……。再追問下去：“爲什麼要把那些 a, b, c, x, y, z 加減乘除？爲什麼要化簡式子？爲什麼要因式分解？代數和算術有沒有不同？不同的話是那兒不同？”他們渴望知道答案，於是我給他們先講一堆性質各不相同的題目，或與日常生活有關，或是有趣味的，或能刺激思考者，從而引出爲什麼需要用符號代替數量。原因之一是用以描述變量之間的關系，原因之二是用作指令以計算某數量。有了這種代數式的想法，便不難想到既然那些符號是代表數量（只不過暫時有一些仍未知道應取何值），爲什麼不把適用於一般數量的運算法則施諸於它們的身上呢？於是問題化爲解方程或不等式，（中學）代數基本上就是這樣把適用於一般數量的運算法則用於普遍情況，有系統地解決各種數量問題（也請參看項武義，《從算術到代數》，1981）。化簡式子、因式分解、二次方程解公式、指數法則、……不外手段而已。事實上這種想法早在十六世紀便已有人提出，是法國數學家韋達 (Vieta)，他在 1591 年出版的《分析術引論》開首即引用古代希臘數學家帕普士 (Pappus) 的話，討論分析方法和綜合方法不同之處，然後解釋在計算數量問題中如何採用分析方法。他區別兩種計算，分別稱作“數的算術”和“類的算術”，前者即是數字的計算，後者即是符號的計算，也就是今天中學生在代數課上的事情，“代數”的中文詞最先見於李善蘭和偉烈亞力 (Wylie) 在 1859 年合譯棣摩甘 (Demorgan) 的《代數學》，後來華蘅芳在 1873 年譯另一書時曾對此詞加以說明：“代數之法，無論何數，皆可任以何記號代之。”（梁宗巨，《世界數學史簡編》，1980）。韋達在《分析術引論》結尾時讚嘆道：“沒有問題是解不出的。”我記得初學代數時，回想在高小時很費勁學習的什麼雞兔問題、流水問題、時鐘問題……的確有類似的想法呢！“代數”的英文詞 (Algebra) 源於阿拉伯數學家花拉子模 (Al-khwarizmi) 在 830 年左右寫成的一本書，是書名裡其中一個字經拉丁化而來的。關於這個字的詞源頗有興味，於此不贅（可參看克萊因，《古今數學思想》，1972，有中譯本）。直至十九世紀初，代數一詞還是單指解方程的學問，是花拉子模這本書的內容的延伸。讓我們看一道書裡的題目：“平方

加十個根是三十九，求之。”意即解方程 $x^2+10x=39$。花拉子模是以文字寫下答案，相當於給出一個普遍法則，就是 $x^2+bx=c$ 的（一個）解是 $x=\sqrt{(b/2)^2+c}-(b/2)$。今天我們當然認得這個答案，且可從一般二次方程解公式而得，但值得留意的是他的解釋和他對解釋一個答案所持的立場。他採用的幾何解釋生動形象地說明了什麼叫做“配方法”（見圖1），接著他說：“我們扼要地用幾何解釋這回事，以便更易理解它。有些事情單靠思維不易明白，加上幾何形象便清晰多了。”我們不妨把這句話引伸成証明是爲了求理解和領悟，這一點說來好像自然不過，但很多時候我們爲了斤斤計較邏輯上的細節和過份執著嚴謹，偏重了証明的驗証核算作用，卻忽略了它的說明作用。一個好的証明不單是一連串邏輯無誤的推導，而是能使人洞察該定理成立的關鍵所在。



$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$$

圖 1

另一點值得注意的，是花拉子模的兩種手法 —— 算法與幾何解釋 —— 都可在古代數學尋著根源。在算法方面他承襲了古代巴比倫的數學傳統，在幾何方面他引用了古代希臘的數學方法。要交待這一點，是另一篇文章的任務了，不述。如果你翻查歐几里德（Euclid）的《原本》卷二尋找資料，必能大有所獲。在今天這個電腦時代，算法概念日益重要，但其實數千年前巴比倫人已經慣於此道了！巴比倫人懂得有系統地處理基本上是二次方程的問題，但對涉及三次方程的問題只能作個別處理。所以在文藝復興期後的西方數學家自然要問：怎樣有系統地求解三次方程？接著發生的故事是數學史上多姿多采的一頁，我也不講了，只寫下成果，即是三次方程解的公式。以 $x^3+mx=n$ 爲例，答案是

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}+\frac{n}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}-\frac{n}{2}}$$

，通常稱卡丹（Cardano）公式。卡丹在 1545 年的《大術》對這公式的幾何說明也很精采，是“配方法”的三維推廣。

但更有趣的是卡丹雖然解了三次方程，他卻迴避方程的複根。在《大術》全書裡，只有一次（在第三十七章）他提及一個涉及複根的問題：把 10 分成兩份，乘積是 40。他得到答案是 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$，但他的注解卻帶有道歉的口吻：“不管會受多大的良心責備，把 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 相乘，便得到 $25-(-15)$，即是 40 …… 可見算術是怎

樣神秘地發展下去，正如我先說過，它的目標既精緻但也是不中用的。”然而就是卡丹的三次方程解公式逼使數學家面對複根的問題。複根在二次方程出現時，數學家可以“視而不見”，干脆不接受它，但在 1572 年意大利數學家邦別利（Bombelli）考慮方程 $x^3=15x+4$ 時，明顯地 4 是一個解，卡丹公式卻得到解是 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-11}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-11}}$ 怎樣解釋呢？歷史的發展就是這麼曲析，今天我們回顧起來會感到奇怪，爲什麼 $x^2+1=0$ 這麼自然的問題卻沒導致複數的出現？這是“以今人之心度古人之腹”，就正如很多時候我們“以教師之心度學生之腹”，奇怪爲什麼這樣明顯不過的道理，學生總是明白不來！在很大程度上（但不完全是），歷史的發展過程提供了認識過程的線索，在這方面數學史是有一定幫助的。

回到解方程的問題，四次或更高次的方程有沒有求解公式呢？數學家懂得複數後，便知道任何方程必有複根，但能否用一條只涉及系數（和某些常數）與四則運算及開方根運算的公式求解，又是另一回事。經過二百多年的努力，得到的答案是：高於四次的方程，一般來說不能有這樣的求解公式！對一般中學生來說，這種答案是難以接受的，“你怎麼知道不可能？不懂得怎麼做算不算不可能？”事實上，對當時的數學家來說，這樣的答案也是難以接受的。但數學卻有不少這樣的矛盾，尤其在踏入二十世紀後，數學家甚至發現有些事情雖然是對的，卻沒辦法証明它！在眾多學科中，能以自身說明自身的不足者，恐怕只有數學了。向一般中學生講解高於四次的方程不能以根式求解，並不易辦到，那究竟是一個深刻的數學定理，但是那不等於說不能提及。很多主修數學的大學生，在抽象代數課程快結束時才碰到一般五次方程不可解這個定理，才發覺原來在抽象代數念的一大堆群、環、域、竟與中學代數也有些關聯。但其實自阿貝爾（Abel）在 1826 年証明了這個結果後，伽羅華（Galois）更在 1832 年提出一套優美獨特的理論，解答了哪些方程可以根式求解，哪些方程不可以根式求解。更重要者，他繼承了拉格朗日（Lagrange）的工作，奠定了群這個重要數學概念的地位。今天，在一個大學的抽象代數課程裡，我們習慣從群的公理開始，越念下去便出現越多抽象的概念和名詞。要是從韋達、歐拉（Euler）、格拉朗日、阿貝爾、伽羅華諸人關於方程的研究追蹤下去，加上十九世紀數學家如高斯（Gauss）、柯西（Cauchy）、凱萊（Cayley）、哈密頓（Hamilton）諸人在別的課題上的研究的影響，是可以看到抽象代數怎樣成型的。時至今日，代數發展迅猛，不易爲它下一個定義，正如著名現代數學家麥克萊恩（Maclane）說：“沒有一個正式定義能維持太久,因爲各種思想和問題的影響，使代數這門學科不斷地改變它的面貌。”話雖如此，代數還是有它的過去，從它的過去發展著手備課，帶領學生進入這門學科，是一條更富動機也更能增加數學理解的途徑。