

節錄自《數學傳播》，原文刊於第16卷第3期（1992），23-29頁。

數學史和數學教育：個人的經驗和看法

蕭文強

1. 我怎樣跑進數學史打轉？

1974年夏，我在美國一所大學裡教書。有一天系主任匆匆跑來告訴我有位同事摔倒斷了腿，得休養一段日子。叫我代他的課。沒有別的人願擔那門課，當時我剛到任兩年，論年資乃最淺，“苦差”自然落在我的肩上！為什麼沒有人願擔那門課呢？原來那門“數學欣賞”課雖然名字漂亮動聽，實則是一門專為非理工科學生而設的數學課，好讓學生取得足夠學分以滿足通識教育的要求，把它稱作“厭惡數學的人被迫上的數學課”，或更貼切！第一天上課，一百五十多位學生劈頭便嚷：“我又不需要使用數學，為什麼要學習數學？”頓時令我啞口無言！但這也令我首次從一個不需要使用數學作為工具的人的眼光去想這個問題。（過了四年後，我真的寫了一本小書，書名就叫做《為什麼要學習數學？》，記下了當時我的初步看法。）

為了應付“苦差”，在九月開課前我“惡補”一番，拼命讀書做筆記，又反覆思量。經過消化大量材料後，我認識到哲學的省思和歷史的省思的重要，尤其從數學史獲得不少啟發。漸漸我不單為備課而看書了，後來它更成為一種學習興趣，至今不減分毫。更想不到的，這種興趣竟然孕育了一種鼓舞，不只使我對數學的整體認識得到提高，還使我對數學的信念和熱愛得到增強。看來，“苦差”竟成了“優差”呢！

2. 誰需要數學史？

“誰需要數學史？”和“誰需要數學史！”表明了兩種不同的態度，前者意味開放的探討，後者意味既定的否定看法。歸根結底，這兩種不同的態度，其實反映了不同的“數學觀”，在第四節我們要回到這一點。暫時，讓我們開門見山，臚列一些運用數學史於數學教學的理由和方法。這些觀點散見諸為數不算太少的中西文章，恕我不一一列明出處了。以下的總結，取材自 J.Fauvel 的文章“Using History in Mathematics Education”（刊於For the Learning of Mathematics, Vol. 11, No. 2, 1991, 3-6頁），我試把內容整理為以下幾點。

運用數學史於數學教育的理由：

- (1) 引發學習動機，從而使學生（及教師本人）保持對數學的興趣和熱情。
- (2) 為數學平添“人情味”，使它易於親近。也使學生明白前人創業的艱辛，並且明白到不應把自己碰到的學習困難歸咎於自己愚笨。同時，教師也可以從歷史發展中的絆腳石瞭解學生的學習困難，可以參考歷史發展作為計劃課題安排的指引。（在這兒要提醒一點，參考歷史發展作為指引，絕不等同完全按歷史發展去講授，因為真正的歷史發展有時非常迂迴曲折，後

人視之，往往難以理解！)

- (3) 瞭解數學思想發展過程，能增進理解。對比古今，能更好明白現代理論和技巧的優點。
- (4) 對數學整體有較全面的看法和認識。
- (5) 滲透多元文化觀點，瞭解數學與社會發展的關係，並提供跨科合作的通識教育。
- (6) 數學史提供學生進一步探索的機會和素材。

運用數學史於數學教育的方法：

- (1) 在講課中加插數學家的軼事和言行。
- (2) 開始講授某個數學概念時，先介紹它的歷史發展。
- (3) 以數學史上的名題及其解答去講授有關的數學概念，以數學史上的關鍵事例去說明有關的技巧方法，以數學史上的著名錯誤或誤解去幫助學生克服學習困難。
- (4) 利用原著數學文獻設計課堂習作。
- (5) 指導學生製作富數學史興味的壁報、專題、探討、特輯、甚至戲劇、錄像…。
- (6) 在課程內容裡滲透歷史發展觀點。
- (7) 以數學史作指引去設計整體課程。
- (8) 講授數學史的課。

與其把以上逐點詳加解釋，不如讓我從個人經驗中抽取一些事例，說明如何在教學上運用數學史。固然，這些個人的做法，可能失諸片面，也可能流於主觀，但或許仍能起一點參考作用吧。在下一節我只列舉在其中取材的書本或文章，適當地加點按語。這束事例是在不同的課上運用，如果讀者感覺敘述上比較散漫凌亂，還請原諒，並且請用一種多元眼光看待它。這些事例也並不企圖包羅眾多的數學史參考資料，請讀者不要把它視為一張參考書目。

3. 事例一束 (此節省略)

4. 數學史真的有幫助嗎？

從上一節所學的事例中，讀者大概能意會到我心目中的“可運用的數學史”是指什麼吧？它不單指人物、軼事、誰何時發現什麼、…，它也不等於專門數學史家的研究工作。固然，我們絕不排除這些材料，它們是不可缺少的幫助。我是以一個數學工作者和數學教師的身份看待數學史，不論是原著、二手材料、論述或者故事、傳記，都是我們的營養品，值得我們學習、消化、運用。通過這些材料，我們看到多姿多彩的數學意念如何產生，明白到它們如何演變成爲今天熟悉的形式，也從這些發展演變當中認識到創造這些知識的人，產生這些人和這些知識的客觀條件，還有這些知識的社會作用和它對文化的影響。十八世紀德國文豪 Goethe 說過：“一門科學的歷史就是那門科學本身。”用諸於數學，我們不妨說：“數學史就是數學本身。”所以，吸收和運用數學史，既充實了自己，也豐富了教學。

對於運用數學史於教學的建議，最常碰到的消極反應有兩種：(1)“我要教的是現代人用的數學，管它古代人怎麼做數學呢？那些老古董頂多拿來作點綴而已，它並不是真正的數學。即使你說從數學史能窺探數學的本質和意義，那又與我何干？我不是研究哲學的，我只想把數學教好吧。”(2)“雖然我承認數學史既有益又有趣，但我那兒來這份閒情逸緻去運用它？單是要在規定的時間內教懂這一大群程度參差的學生規定的課程範圍裡的數學，已夠忙的！”

這兩種反應貌似不同，實則反映了同一件事：在數學教育中，我們往往只強調實用知識這一個目標。不同時代不同地區的數學課程綱要，內容和使用字眼或許不相同，但籠統扼要地說，它們的目標都可以分為三方面，即是：(1)思維訓練，(2)實用知識，(3)文化素養。但往往我們只注重(2)，把數學單單作為一種技能，一種工具去講授。這樣做的話，縱使傳授了知識，亦必掩蓋了數學作為文化活動的面目。學生不易瞭解數學有它的生命和發展，有它的過去和未來；學生容易把數學看成是一堆現成的公式和定理，雖然完美無誤但也是僵硬不變而且刻板枯燥；學生見到的儘是技巧堆砌和邏輯遊戲，予人閉門造車的印象。難怪只有極少數學生被數學吸引了，也有少數一些學生為了日後需要使用這種工具姑且把它捱過去，其餘絕大部份學生都與數學疏離，或者厭惡害怕它，或者對它持冷漠態度。很多學生中學畢業了，卻像完全沒有學過數學這科，只當它是一場惡夢。

數學教學有“狹義”和“廣義”兩方面：前者是指傳授數學知識，後者較難界定，籠統地說它是指“數學觀”的體現。什麼是“數學觀”呢？有些人以為那些是抽象的哲學問題，其實它並不抽象，你的數學觀就是你對數學的看法，你對數學本質和意義的見解。每個人總有自己對事物的看法，因此每個人一定有自己的數學觀。(如果你認為毋須理會數學的本質和意義，那也是一種數學觀！)每個社會的成員的數學觀匯集起來，其主流即形成該社會的數學觀。千萬不要小看這一點，千萬不要以為數學觀與數學教學無干。就個人而言不論你自覺也好，不自覺也好，你的數學觀必定流露反映於你的教學中，從而影響了你的學生。就整個社會而言，證諸歷史，數學和數學教育的內容及發展，決定於當時當地的數學觀。

以前我曾在一篇題為“數學·數學史·數學教師”的文章裡談到數學上的“才、學、識”(刊於《抖擻》雙月刊第53期(1983年7月),67-72頁),這個提法源於清代文學家袁枚的話：“學如弓弩，才如箭鏃，識以領之，方能中鵠。”於數學而言，才是指計算能力、推理能力、分析和綜合能力、洞察力、直觀思維能力、獨立創作力…；學是指各種公式、定理、算法、理論、…；識是指分析鑒別知識再經融會貫通後獲致個人見解的能力。如果把這三點套用於上述的兩方面，“學”便對應於狹義數學教學，而“才、學、識”三者合起來才對應於廣義數學教學。至於這兩方面的功能，大別之或者可以這樣說：狹義數學達致的社會功能，就短線而言乃日常計算或專業需要，就長線而言乃數學研究及科技進展，總而言之，數學是一種工具。廣義數學教學達致的還有教育功能，這包括數學思維延伸至一般思維，培養正確的學習方法和態度、良好學風和品德修養，數學欣賞帶來的學習愉悅以至對知識的尊重。

單單傳授知識，從廣義角度看自然是一個失敗。近代哲學家 A.N.Whitehead 說過：“教育是使人獲得如何使用知識的藝術。”他也說過：“文化素養包含思

維活動與對美和善的感受，而非單單零碎的知識。僅僅擁有知識的人是天下間最沒用的討厭傢伙，我們的目標在於培養既具文化素養又具某種專業知識的人。”即使從狹義的角度看，只注重操練數學技能也不見得傳授了知識。這樣做可能使學生應付過了考試，但卻使大部份學生喪失了興趣、好奇心、批判能力、自學能力、甚至表達能力。總的而言，學生既感受不到一種學習愉悅，也就難於養成一種對知識的尊重了。表面看起來，亞洲學生的數學測試成績排名居世界前列，這從幾屆國際數學教學評估報告中可以看到。但我對這點可不敢沾沾自喜。會不會我們在技術內容方面要求過高，以致忽略了別的方面，而付出的代價就是那些不能在短期內以標準測試方式量度的品質呢？小孩子本來都很喜歡學習，對什麼也感興趣。進了小學後，有些人不再喜歡學習了；進了中學後，更多人不喜歡學習了。原來是有趣的事物，由於不用考或沒法考，變為沒趣！那些要考的，卻由於要考，也變為沒趣！到頭來什麼都沒趣了，這豈非“自討沒趣”嗎？

除了傳授知識以外，數學教師更有責任培養學生的數學素養、眼光和品味。固然，這不是一樁輕而易舉的工作，但只有身在第一線工作的教師才能肩負這項任務，再周全再詳盡的課程綱要亦只能起指引作用而已。數學教師應該設法在日常教學裡滲透這種文化觀點和歷史眼光，讓學生暢泳其中，漸漸形成自己的數學觀。要這樣做，教師必須充實自己的學識。數學的學識可作縱橫看，縱是追溯數學概念和理論的來龍去脈，橫是認識數學的本質和意義，經緯交織而成。一個數學教師也像一個獨奏表演者，憑著自己的理解、領會、功力去詮釋音樂作品。要作美妙的詮釋，表演者本人先必須瞭解該作品和喜愛該作品。數學教師亦復一樣，要把數學教好，教師本人亦必須保持自己對數學的興趣和熱情，充實自己的學識，培養那種文化觀點和歷史眼光。在這幾方面，數學史肯定是有幫助的。讓我引用一段著名科學史家 G.Sarton 的話作為本文的結束：

“數學史家的主要任務，同時又是他最鍾愛的特權，就是詮釋數學的人文成分，顯示數學的偉大、優美和尊嚴，描述歷代的人如何以不斷的努力和積累的才華去建立這座令我們自豪的壯麗紀念碑，也使我們每個人對著它嘆為奇觀，感到謙遜而謝天。學習數學史倒不一定產生更出色的數學家，但它產生更溫雅的數學家。學習數學史能豐富他們的思想，撫慰他們的心靈，並且培植他們的高雅品質。”（《數學史的研究》），1936年）