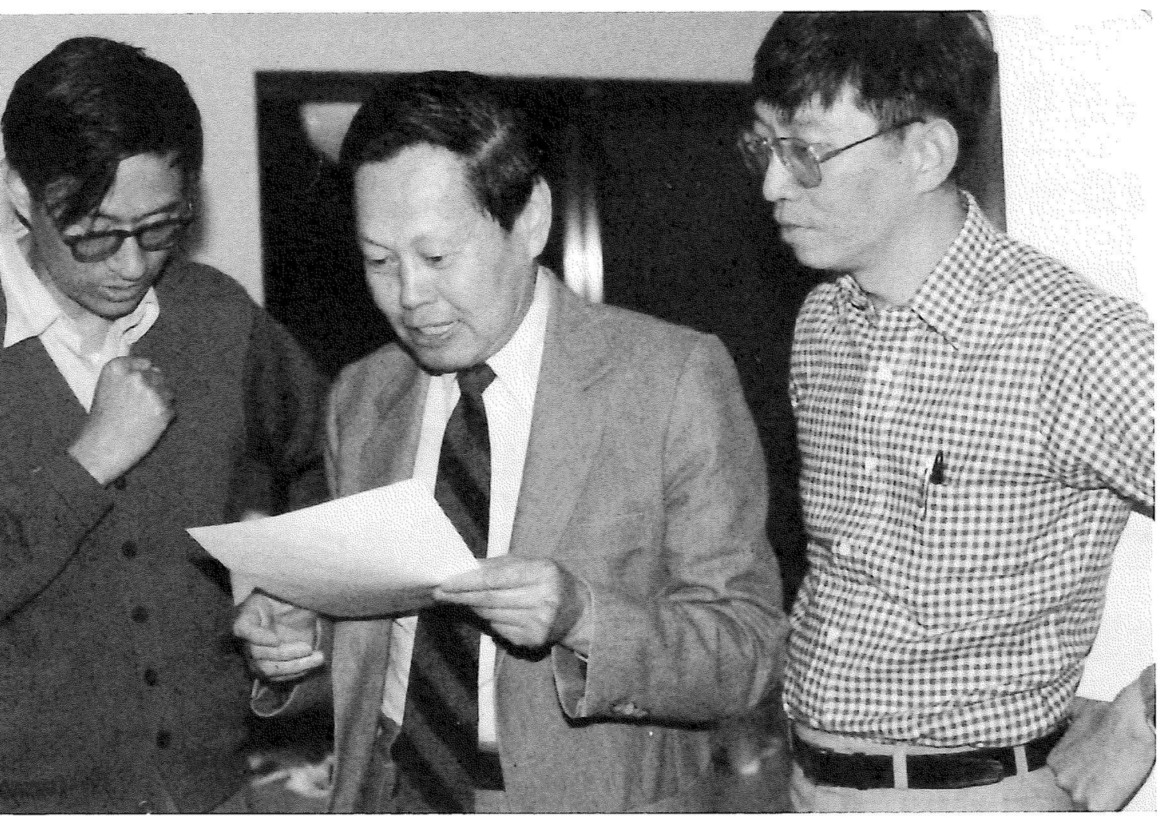
楊振寧的扭計骰

曾經在紐約州立大學石溪分校的理論物理研究所呆了好幾個月，與三位中國科學院的教授同住一個房子，當時研究所所長是楊振寧教授。一天，我們約了他到我們住處晚飯。

飯後，楊振寧從口袋裏掏出一顆“扭計骰”。於是幾個智商不低的數理博士便圍攏着，爭先恐後把那玩意扭來扭去，許久還未能達到指定的模樣。一會兒，楊振寧又拿出一張皺巴巴的紙，上面寫了許多 X、Y、Z 之類的符號，原來這是他以數學羣論的技法找尋“扭計骰”解法的筆記。他向我們解釋那些算式的意思之後，我們就按上面的訣竅重整旗鼓，但也要半個小時後，才力攻而下。



楊振寧手持寫有數學方程的紙張，述說他如何以代數羣論解決扭計骰問題（右為作者）。

楊振寧笑着説："這辦法花的時間的確長，我自己也要用 15 分鐘。反之，我的 16 歲小兒子把骰子搯在手中，東翻一下，西扭一轉，完全憑直覺，不消 5 分鐘便解決了。"

要解決具體的問題，數理邏輯雖較可靠，卻往往不是最有效率。阿達瑪（J. Hadamard）在《數學領域的發明心理學》（*The Psychology of Invention in the Mathematical Field*）一書裏，就舉了一個例子：假如我們向空中投擲一顆細小的彈子，讓它繼續運行，潛意識會立刻告訴我們，彈子在空中的軌跡自始至終都會在一個垂直的平面上。顯然，我們潛意識裏的推理，已引用了一種"充分理據原則"——沒有甚麼理由使我們相信，彈子要走到那垂直平面的左邊，而不走到它的右邊。但在物理學裏運用了幾個微積分定理的正式證明，卻是繞完全不同的思路。上述的直覺"推理"也可以嚴謹的數學表達，但過程中要運用一條普遍定理，而這條定理的證明，卻又要在更高深的微積分課程中才找得到。看來，數學上的證明，比我們電光火石般的直覺洞悉要緩慢得多。

另外，如果我們在平面上畫一圈途中不與自己相交的閉曲線，我們憑"常識"便知道，這曲線已把平面分割為內外兩部分。這結論也是對的，但要以數學嚴格證明卻極為艱難；我們的直覺大概是從許多以前的相類經驗，總結出這個結果——就像圍棋高手經歷過無數次對弈，一眼便能辨識棋局的大勢；也像楊振寧的小兒子，因長期把玩扭計骰，片刻便能找到諾貝爾得獎人也難以算出的破解套路。

可惜直感並不是永遠正確的，如果我們在平面上用鉛筆畫一條延續不斷的曲線，常識會告訴我們，在線上的任何一點上（曲線突然拐彎的少數點上可能除外），曲線總得朝某些方向行走。這大概也是經驗累積而來的直覺判斷，但這卻是錯誤的想法——數學家早已舉出在任何點上都沒有切線的連續曲線的例子。

直感雖然直接迅速，卻有錯誤的可能；嚴謹數學雖然準確可靠，卻往往迂迴繁複。而且，數學推理的整體策略與微觀步驟，也沒法不靠直感的提示。不過，涉足數學的人，無論是學生還是大師，卻又可不斷在新的嚴謹結果上，建立更高層次的直感。在知識探求的過程中，邏輯推理與直覺思維總是互為表裏，交替作下一步攀援的力點。