博弈高手

— 淺論約翰・納殊的諾貝爾獎得獎理論

吳端偉博士
香港大學數學系

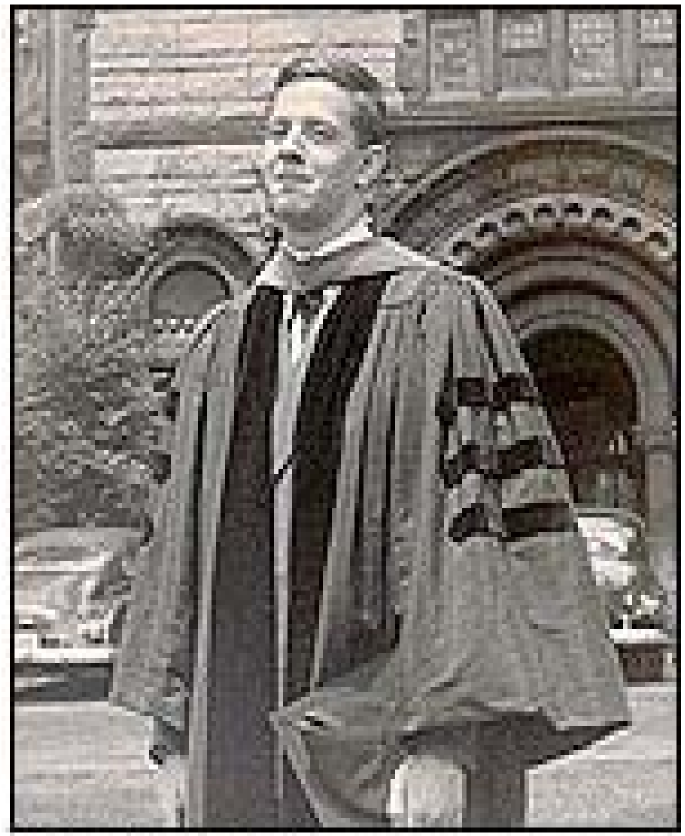
內 容

- 約翰・納殊(John Nash)的生平。
- 博弈論(Game Theory)淺介。
- 納殊贏得諾貝爾獎的理論。
- 納殊理論的影響力。

納殊的生平

數學家約翰・納殊
(John Nash)於1928年
在美國出生。

年僅二十二歲便取得
普林斯頓大學數學博士
學位。



MARTHA NASH LEGG

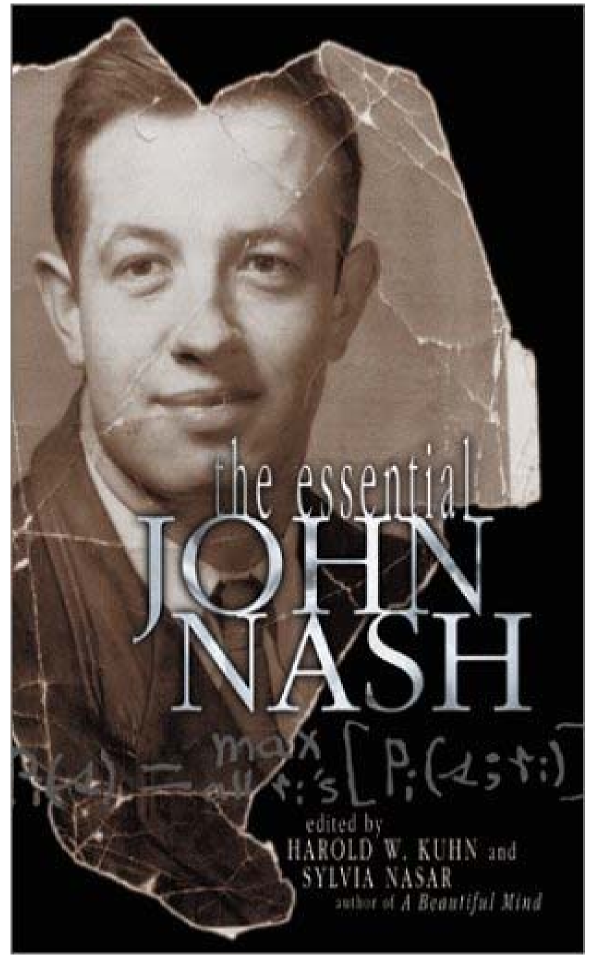
當納殊申請普林斯頓大學研究院時，他的老師為他所寫的推介信只有一行字：「此人是天才！」(This man is a genius)。

- 納殊於1951年，開始在麻省理工(MIT)任教。
- 不久，他便認識了一位名叫愛麗西亞・拉德(Alicia Larde)的物理系學生。
- 他們於1957年結婚。

ALICIA NASH

- 在1959年，30歲的納殊患上了精神分裂症，隨後多次進出精神病院。

- 二十多年後，納殊奇蹟
地康復過來。



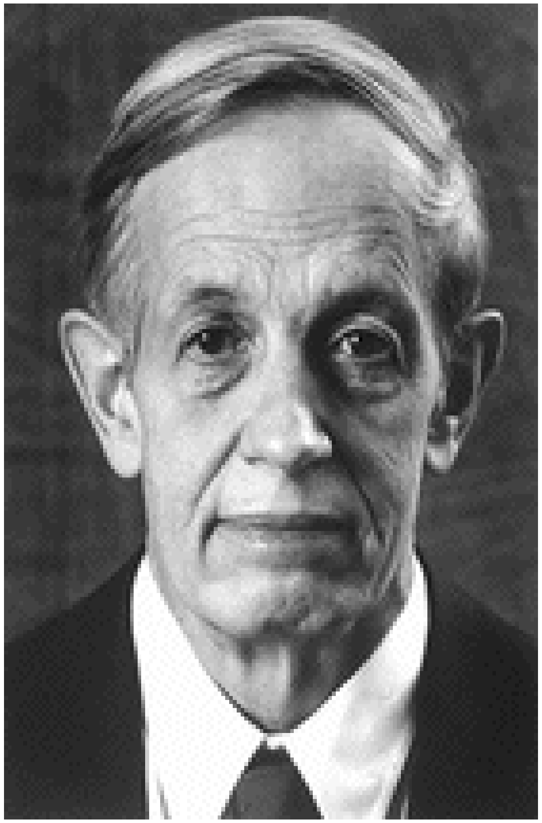
- 在他那只有二十七頁的博士論文 <<非合作性博弈>> (Non-cooperative Games)，納殊奠下了博弈論最重要的數學基礎。

- 在這論文裏，納殊大大發展了由馮 • 諾伊曼 (John von Neumann)所創立的博弈論。

- 在1994年，納殊， 約翰・夏仙義(John C. Harsanyi)和雷恩哈德・塞爾頓(Reinhard Selten)同獲諾貝爾經濟學獎。


ALICIA NASH

在1999年，納殊獲得Steele獎，以表揚他在純數學上的貢獻。



什麼是博弈論?

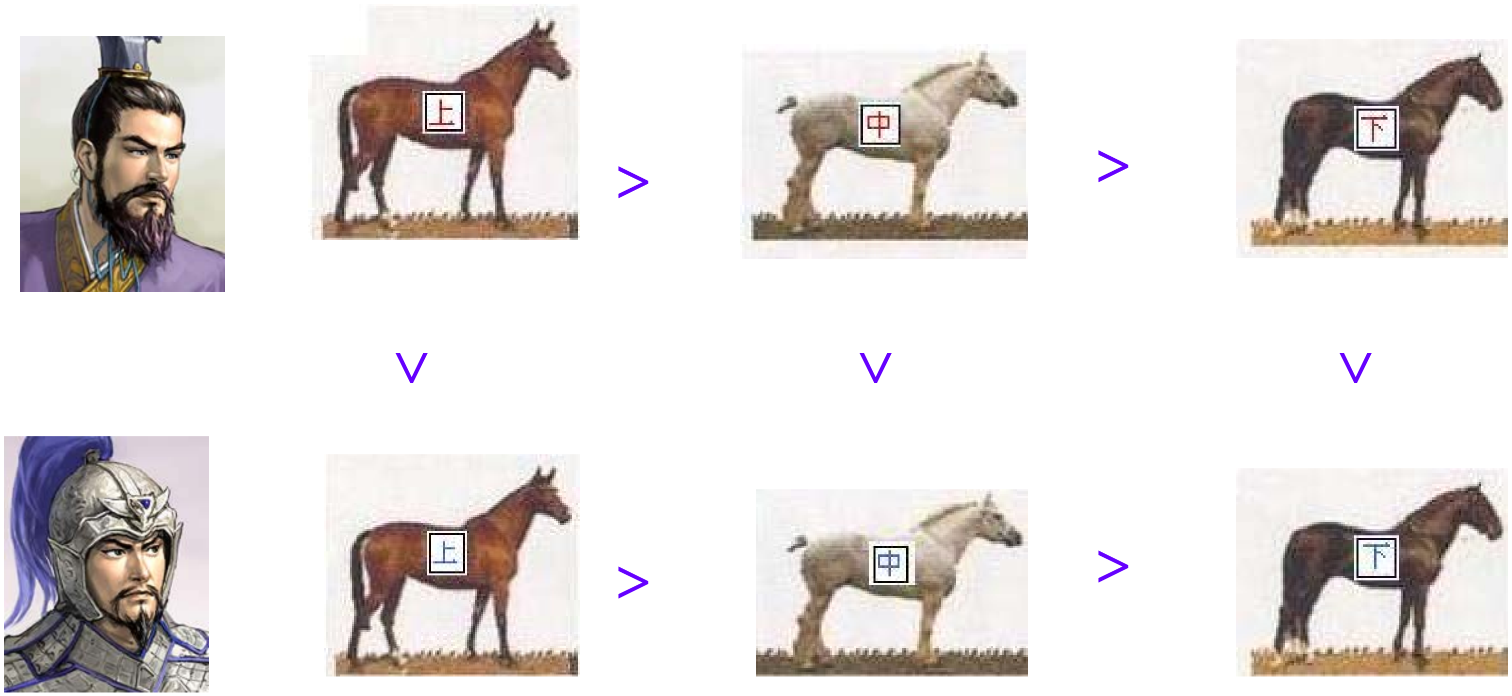
- Game Theory：遊戲理論、賽局論、對策論、博弈論。
- Game：遊戲、賽局、博弈。

什麼是博弈論?

- 博弈論嘗試為決策者之間的衝突與合作建立數學模型。

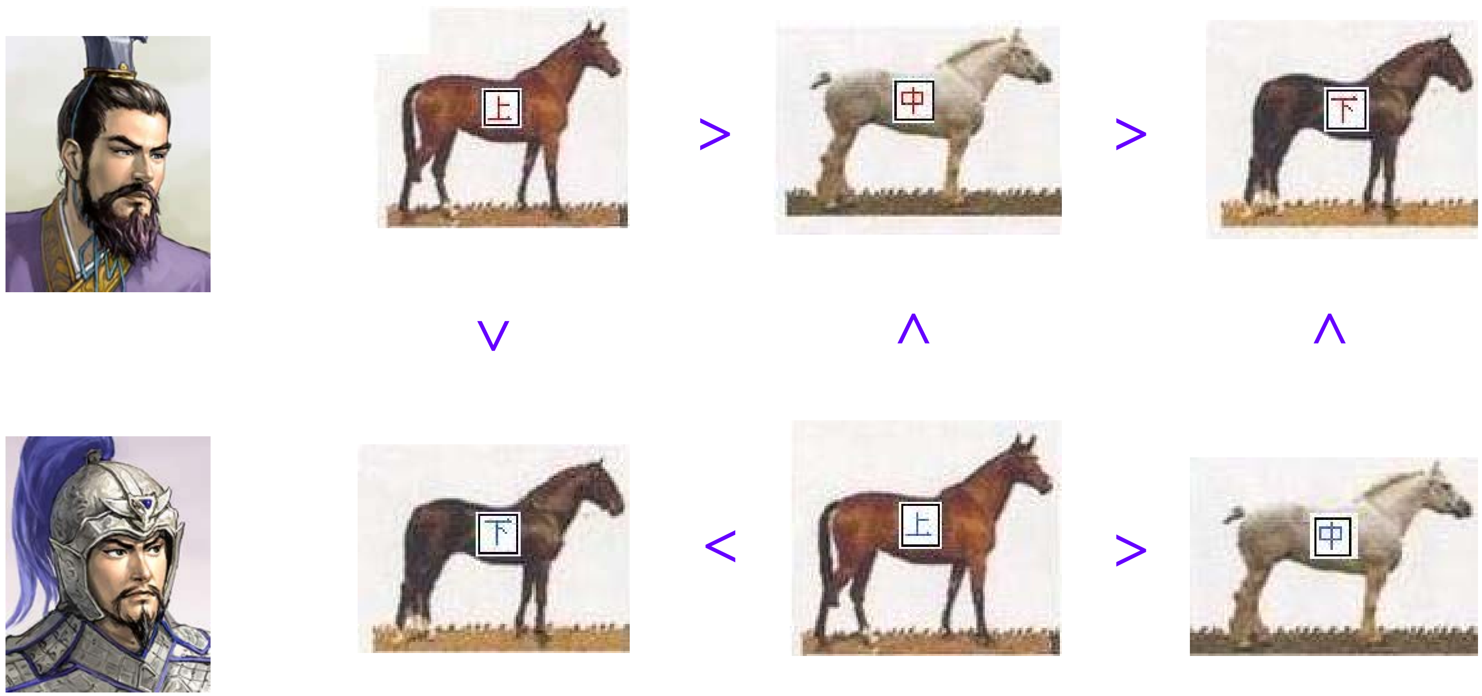
- 它研究每一個決策者將如何根據其他對手的策略，去作出最有利自己的策略。

- 齊威王與大將田忌各有三匹馬， 牠們的質素如下。



每次雙方各出三匹馬，一對一比賽三場， 每一場負方要賠一千斤銅給勝方。

- 田忌每次都連輸三場。
- 後來他用以下策略才能反敗為勝。



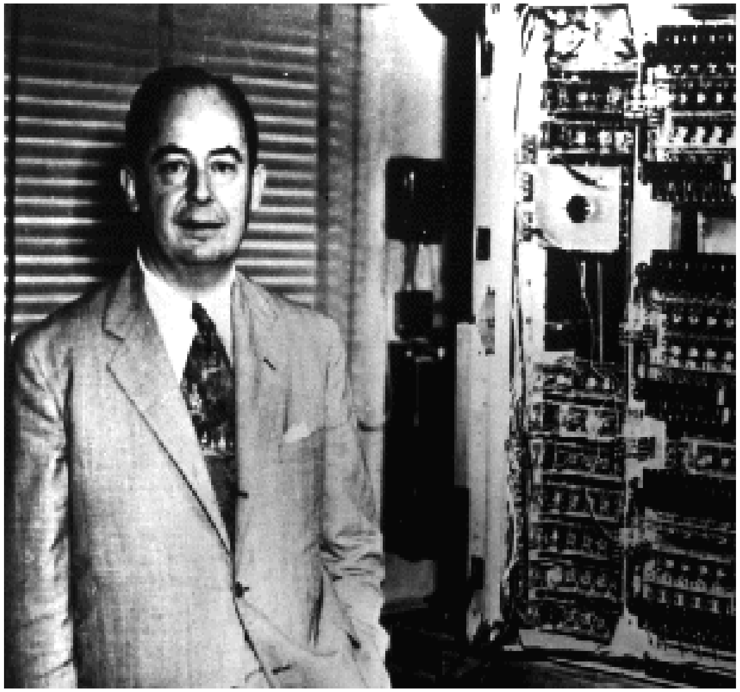
- 比賽下去，雙方都意識到不能用單一的策略。
- 雙方都要用混合策略，例如田忌用 $(\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$ 。
- 「博弈論」嘗試推斷出雙方將用何種混合策略。

大將田忌

齊威王		上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上
	上中下	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
	上下中	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
	中上下	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
	中下上	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
	下上中	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
	下中上	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

馮‧諾伊曼(John von Neumann)

- 博弈論是數學家馮‧諾伊曼於1928年所創立。
- 生於1903，匈牙利。
- 曾參與原子彈的創造。
- 設計及建造第一部電腦。



馮・諾伊曼

- 最後一個數學全才，在幾個數學和理論物理的分支做了很多基礎性的工作。

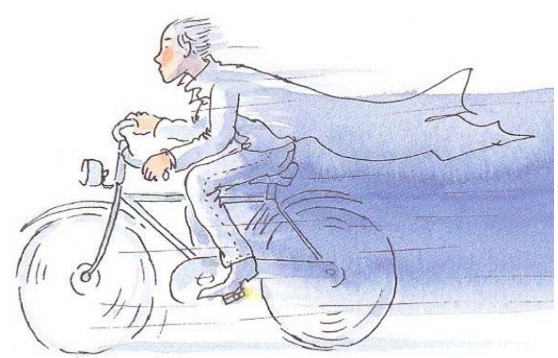
- 擁有驚人的記憶力和思考速度。

- 有人問馮•諾伊曼以下的問題。

向右走

向左走

距離20哩



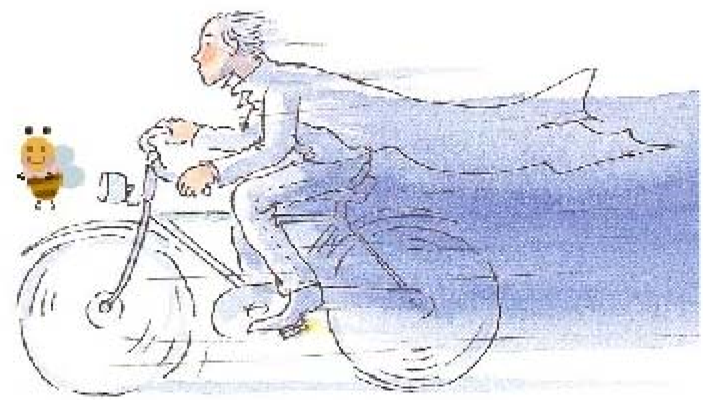
10 m.p.h.

10 m.p.h.

向右走

蜜蜂的速度是
15 m.p.h.

向左走



幾 哩?

- 蜜蜂來來回回總共飛了多少哩呢?

- 方法一：找出每一次來回的路程，然後把它們加起來。

- 方法二：留意到兩單車將於一小時後相遇，所以蜜蜂飛了**15**哩。

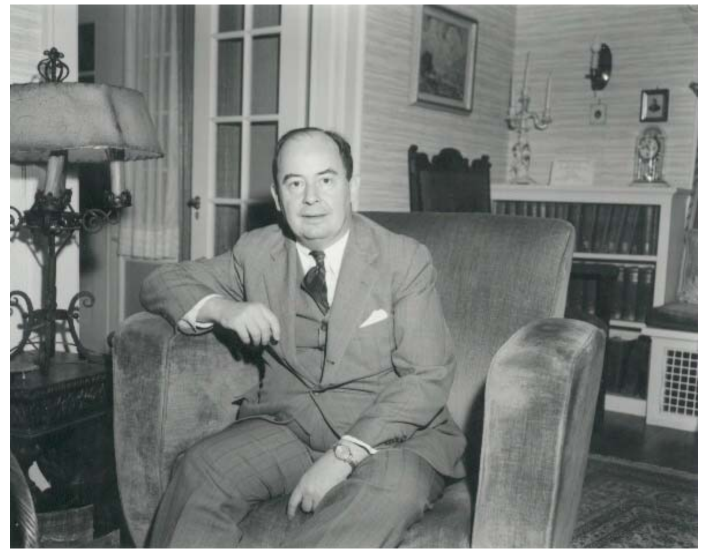
- 馮‧諾伊曼毫不費勁便找到答案，令問者以為他一早已知第二個方法。

- 然而，馮‧諾伊曼只是在腦中，快速的把所有距離加起來！

馮・諾伊曼

- 當馮・諾伊曼在1928年創立博弈論時，它只是純數學的一個分支。

- 他與經濟學家摩根斯坦(Oskar Morgenstern)於1944年合作撰寫了＜博弈論的經濟行為＞(Theory of Games and Economic Behavior) 。



博弈論與經濟學

- 博弈論研究人們如何根據其他對手的策略，去作出最有利自己的策略。
- 由於經濟活動往往涉及策略的運用，博弈論因而大派用場。

報章減價戰

- 蘋果日報與東方日報正考慮應否減價 。

Vs

- 兩報可分別選擇減價或不減價。
- 假設兩報都不減價，則各可賺取二千萬。
- 若己方減價而對手不減價，則己方可賺取三千萬而對手則只能賺到五百萬。

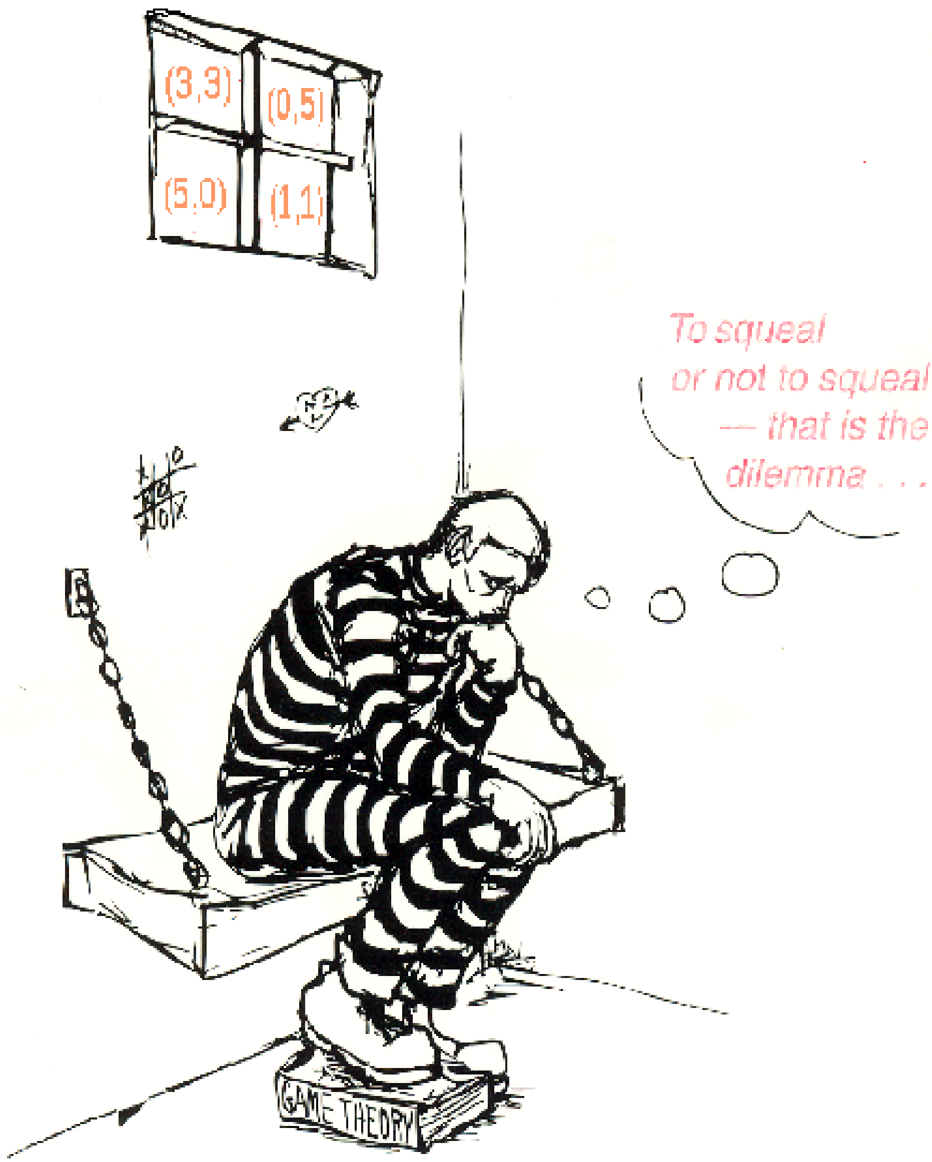
- 若兩報同時減價，則各可賺取一千萬。

		東方日報	
		減價	不減價
蘋果日報	減價	1, 1	3, 0.5
	不減價	0.5, 3	2, 2

蘋果 : (減 , 不減) > (不減 , 不減) > (減 , 減) > (不減 , 減)

東方 : (不減 , 減) > (不減 , 不減) > (減 , 減) > (減 , 不減)

疑犯困境 (Prisoner’s Dilemma)



甲與乙被警方以藏械罪名拘捕。警方懷疑他們正準備持械行劫。兩人被單獨囚禁和盤問。

如果二人都承認意圖行劫，每人將被判入獄三年。

如果他們都不承認，則各判入獄一年。

如果一人否認而另一人承認，並且願意作證，那否認者將被判入獄五年，而承認者則可獲釋放。

疑犯困境

		乙	
		認罪	不認罪
甲	認罪	3, 3	0, 5
	不認罪	5, 0	1, 1

甲：(認，不認) > (不認，不認) > (認，認) > (不認，認)

乙：(不認，認) > (不認，不認) > (認，認) > (認，不認)

兩例的共同點

- 有兩個參與者，A 和 B。
- 每個參與者都有兩個策略， C 和 D。
- 共有四個策略組合：
  (C, C)， (C, D) , (D,C), (D, D) 。
- 雙方都知道各策略組合的得失。

		東方日報 (B)	
		減價 (C)	不減價 (D)
蘋果日報 (A)	減價 (C)	1, 1	3, 0.5
	不減價 (D)	0.5, 3	2, 2

		乙 (B)	
		認罪 (C)	不認罪 (D)
甲 (A)	認罪 (C)	3, 3	0, 5
	不認罪 (D)	5, 0	1, 1

- 參與者 A 和 B 根據各決策組合的得失， 得到以下決策組合的優先次序。

參與者 A : $(C, D) > (D, D) > (C, C) > (D, C)$

參與者 B : $(D, C) > (D, D) > (C, C) > (C, D)$

- 參與者 A : $(C, D) > (D, D) > (C, C) > (D, C)$
- 參與者 B : $(D, C) > (D, D) > (C, C) > (C, D)$
- 如果我們能根據以上資料，分析出 A 和 B 的選擇，則可把結果應用到以上兩例。
- 我們將看到 A 和 B 都會選C ，雖然他們都知道 $(D, D) > (C, C)$ 。

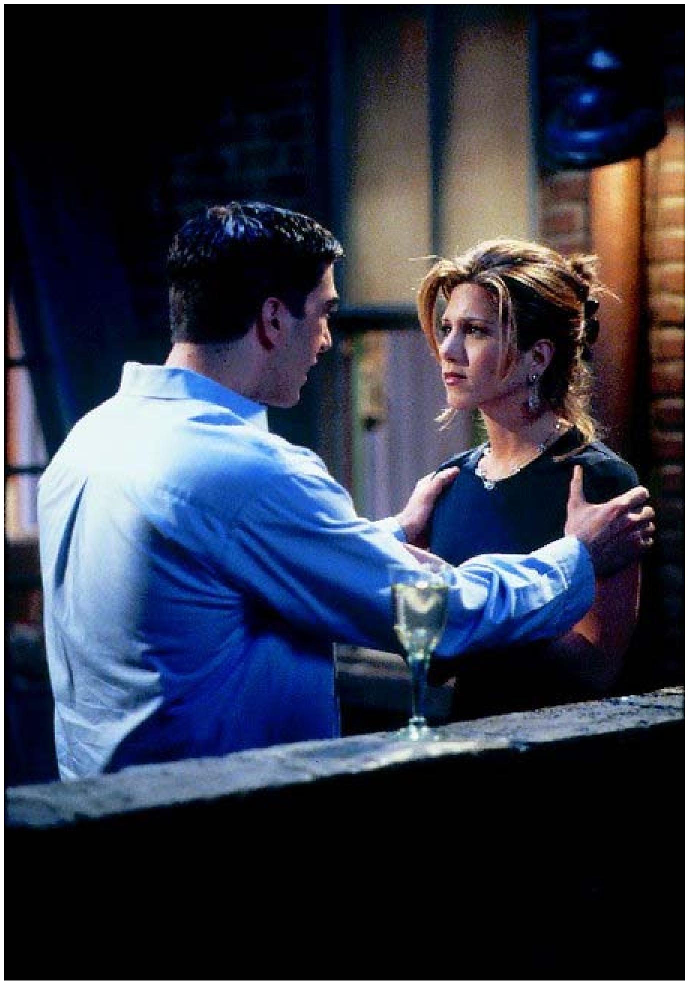
何謂博弈?

- 前兩例都是博弈論 (Game Theory)裏博弈(Game) 的例子。
- 每個博弈(Game)是由以下四個條件來界定。

博弈的界定

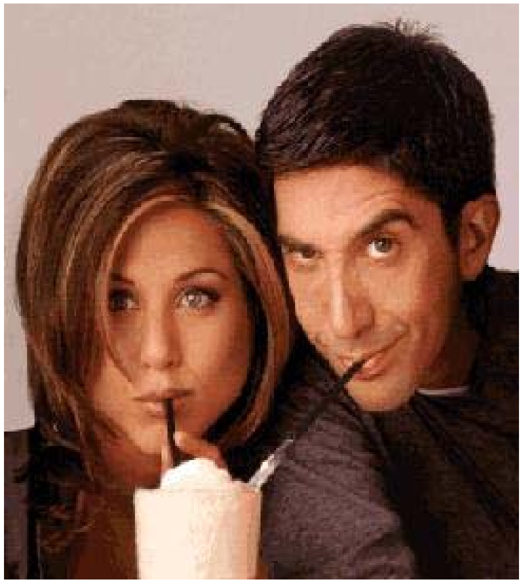
1. 參與者的數目。
2. 參與者各自可選擇的全部策略。
3. 所有可能出現的策略組合。
4. 各參與者在每個策略組合的得失。

約會與博弈



- Ross 與 Rachel 計劃共渡週末。
- Ross想看足球比賽而Rachel 則喜歡看電影。
- 雙方都希望跟對方一起。

Ross 應否犧牲?



		Rachel	
		足球	電影
Ross	足球	2,1	0,0
	電影	0,0	1,2

法文或德文?

阿Sa與阿嬌打算學一門外語。

阿Sa想選修德文，而阿嬌則想學法文。

她們都想一起上課。

		阿嬌 (B)	
		德文(C)	法文(D)
阿Sa (A)	德文(C)	3, 2	1, 1
	法文(D)	0, 0	2, 3

阿Sa　：(德，德) > (法，法) > (德，法) > (法，德)

阿嬌　：(法，法) > (德，德) > (德，法) > (法，德)

參與者 A : $(C, C) > (D, D) > (C, D) > (D, C)$

參與者 B : $(D, D) > (C, C) > (C, D) > (D, C)$

博弈的解 (Solution of a game)

- 對每一個博弈，我們都希望知道每個參與者將如何決策。
- 所有參與者的最後決策便構成博弈的解 (solution of a game) 。
- 試找出「疑犯困境」的解。

如何找出博弈的解

假設甲認罪，乙應該如何決策?

		乙	
		認罪	不認罪
甲	認罪	3, 3	0, 5
	~~不認罪~~	~~5, 0~~	~~1, 1~~

如何找出博弈的解

假設甲不認罪，那麼乙應該怎樣做?

		乙	
		認罪	不認罪
甲	~~認罪~~	~~3, 3~~	~~0, 5~~
	不認罪	5, 0	1, 1

上策 (Dominant Strategy)

- 無論其他對手怎樣選擇，這個策略給某參與者帶來的得益，都比任何其他策略為高。
- 乙和甲的上策都是認罪。
- 若乙與甲都是理性的，則他們都會選擇認罪。

博弈的解(結果)

		乙	
		認罪	不認罪
甲	認罪	3, 3	0, 5
	不認罪	5, 0	1, 1

上策均衡
(Dominant Strategy Equilibrium)

- 如果每個參與者都有一個上策，則他們都會選擇其上策，我們因而得知博弈的結果。
- 如果每個參與者都選擇其上策，則這個策略組合稱為「上策均衡」。

上策均衡

- 處於「上策均衡」時，則每個參與者都不會改變自己的策略。
- 如果一個博弈存在「上策均衡」，那麼每個參與者將依從這個均衡去作出選擇，我們因此可以推斷出他們的行為。

上策均衡的存在

- 馮•諾伊曼証明了對一類特殊的二人博弈，「零和博弈」(zero-sum game) ，上策均衡必定存在。
- 可是對大部份的博弈，上策均衡都不存在。

假設阿Sa選了德文，阿嬌應選?

		阿嬌 (B)	
		德文(C)	法文(D)
阿Sa (A)	德文(C)	3, 2	1, 1
	~~法文(D)~~	~~0, 0~~	~~2, 3~~

假設阿Sa選了法文，阿嬌應選?

		阿嬌 (B)	
		德文(C)	法文(D)
阿Sa (A)	~~德文(C)~~	~~3, 2~~	~~1, 1~~
	法文(D)	0, 0	2, 3

- 所以阿嬌並沒有「上策」，因此這個博弈並沒有「上策均衡」。

- 當上策均衡都不存在時，我們應該怎麼辦呢?

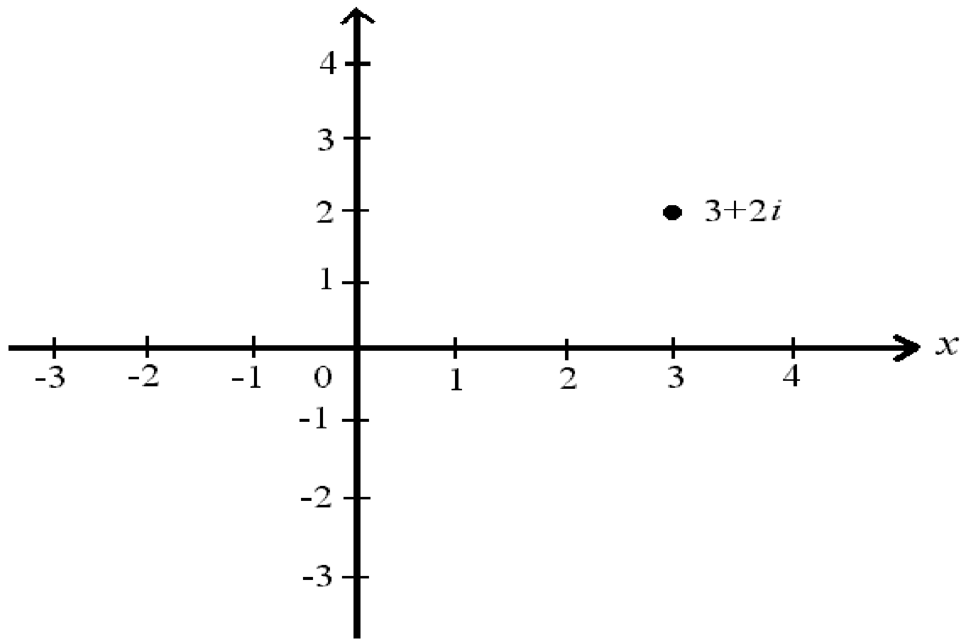
數學裏類似的問題

- 如果 $p(a) = 0$，則實數 a 是多項式 $p(x)$的根(root)，例如 1 是 $p(x) = x^2-2x+1$的根。

- 不是每個多項式都有實數根，例如 $x^2 + 4$ 便沒有實數根，這是因為對所有實數 $x^2 + 4 > 0$ 。

- 解決這個問題的方法，是引進一種更加一般的數。這種數叫做複數 (complex number)，例如：

$$a+bi\,(i=\sqrt{-1}\,,\,i^2=-1)$$



複數

- $a = 2i$ ($=2\sqrt{-1}$) 是 x^2+4的一個根因為 $(2i)^2 = 4i^2 = -4$。
- 數學家高斯 (Gauss)証明：每一個非常數多項式都最少有一個複數根。

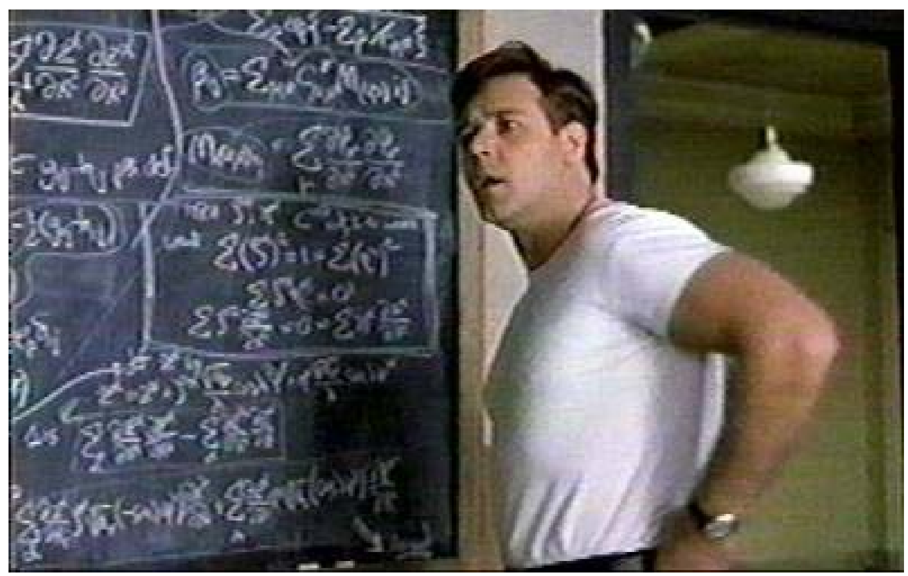
嘗試為每個博弈引入比「上策均衡」更一般的解的概念，並証明每個博弈都最少要有一個這樣的解。

納殊如何獲得諾貝爾經濟學獎?

- 在納殊的博士論文裏，他引入了現稱為混合納殊均衡 (**mixed Nash equilibrium**)的概念。它是一種比上策均衡更一般的解。
- 納殊証明，一般地，每個博弈都最少要有一個混合納殊均衡。

有你終生美麗

ALICIA NASH



尋找新解

- 若我們的理論能推算出一個博弈的解 (結果) ，則這個解應該有什麼特性呢?
- 假設我們的理論能推算出參與者甲、乙和丙必會分別選擇策略 A, B 和 C。

尋找新解

- 試想像，如果甲知道乙和丙將會分別選擇 B 和 C ， 那麼他會否不再選 A 呢?
- 如果我們的理論有效， 甲依然會選擇 A 。
- 同樣道理，如果其他人都不改變的話，乙和丙都不會改變各自的策略。

納殊均衡(Nash Equilibrium)

- 一個策略組合稱為「納殊均衡」，如果所有參與者都不會獨自改變他們已選擇的策略。

實例一： 悶堂不早退

- 在一個很沉悶的課堂上，學生可選擇早退或繼續留下聽課。
- 為怕在老師心目中留下壞印象，所以沒有人希望自己成為第一個早退的學生。
- 所有人將選擇「繼續留下」，這正是一個「納殊均衡」。

實例二： 平均分賬

- 十位同學一起吃晚飯，各人可以選擇分別為五十元的普通套餐或八十元的超級套餐，最後以平均分賬的方法付款。
- 每人都選擇一個五十元餐，並不是一個「納殊均衡」。
- 每人都選擇一個八十元餐又如何?

「上策均衡」與「納殊均衡」

- 當處於「上策均衡」時，每一個參與者都不會再改變自己的策略。
- 當處於「納殊均衡」時，每一個參與者都不會獨自改變自己的策略。
- 因此「上策均衡」必定是「納殊均衡」。

納殊均衡的例子

		乙	
		認罪	不認罪
甲	認罪	3, 3	0, 5
	不認罪	5, 0	1, 1

		阿嬌 (B)	
		德文(C)	法文(D)
阿Sa (A)	德文(C)	3, 2	1, 1
	法文(D)	0, 0	2, 3

非納殊均衡

- 在電影中，納殊建議大家追求彼此心中的次選。
- 「所有人皆選擇次選」這個策略並不是「納殊均衡」。因為當有人確定其餘四人都不會追求那位金髮美女時，他就必定轉去追求她。

混合納殊均衡

- 要明白「混合納殊均衡」，先要了解「納殊均衡」和「混合策略」。

三人遊戲

- 每人只可以豎起一隻或兩隻手指。
- 唯一豎起一隻手指的，可獲一元獎金。
- 唯一豎起兩隻手指的，可獲兩元獎金。

- 除這兩個情況外，參與者將不會獲任何獎金。
- 你能找出這個遊戲的所有「納殊均衡」嗎?

混合策略

- 若重覆這個遊戲多次， 參與者須決定豎起一隻手指或豎起兩隻手指的百分比，好使自己可以獲得多些獎金。 如百分比是10%豎起一隻手指， 90 % 豎起兩隻手指， 就是「混合策略」。

混合納殊策略

- 對於「混合策略」， 我們亦考慮相應的納殊均衡， 這就是「混合納殊均衡」 。
- 可以計算出這個遊戲的「混合納殊均衡」，是各人均選擇約41%豎起一隻手指，59 %豎起兩隻手指。

納殊的諾貝爾得獎定理

每個 n 人非合作博弈都至少有一個混合納殊均衡。

Every finite n-player non-cooperative game has a mixed Nash equilibrium.

馮 ● 諾伊曼証明：

每一個二人「零和博弈」(zero-sum game)，都有一個「混合上策均衡」。

納殊的証明

- 証明混合納殊均衡的存在等同於某個函數(function)有不動點 (fixed point)。
- 考慮函數 f: X → X，若 f(c) = c， 則 c 是 f 的不動點， 例如， 0 是 $f(x) = x^2$ 的不動點。
- 運用一個不動點定理去保證該函數不動點的存在，從而証明混合納殊均衡的存在。

三人遊戲的混合納殊均衡

- 假設 p, q, r 分別是 A, B, C 豎起一隻手指的機會率。

若C 豎起一隻手指 (r)		B 一隻手指 (q)	B 兩隻手指 (1-q)
A	一隻手指 (p)	0,0,0	0,2,0
A	兩隻手指 (1-p)	2,0,0	0,0,1

若C 豎起兩隻手指 (1 - r)		B 一隻手指 (q)	B 兩隻手指 (1-q)
A	一隻手指 (p)	0,0,2	1,0,0
A	兩隻手指 (1-p)	0,1,0	0,0,0

C 豎起一隻手指 (r)		B	
		一隻手指 (q)	兩隻手指 (1-q)
A	一隻手指 (p)	0,0,0	0,2,0
	兩隻手指 (1-p)	2,0,0	0,0,1

C 豎起兩隻手指 (1 - r)		B	
		一隻手指 (q)	兩隻手指 (1-q)
A	一隻手指 (p)	0,0,2	1,0,0
	兩隻手指 (1-p)	0,1,0	0,0,0

- A 的期望得益是 2(1-p)qr + 1p(1-q)(1-r).
- B 的期望得益是 2p(1-q)r + 1(1-p)q(1-r).
- C 的期望得益是 1(1-p)(1-q) + 2pq(1-r).

- 假設 (p^*, q^*, r^*) 為混合納殊均衡， 其中 $0 < p^*, q^*, r^* < 1$.
- 因此對所有 $0 < p < 1$,

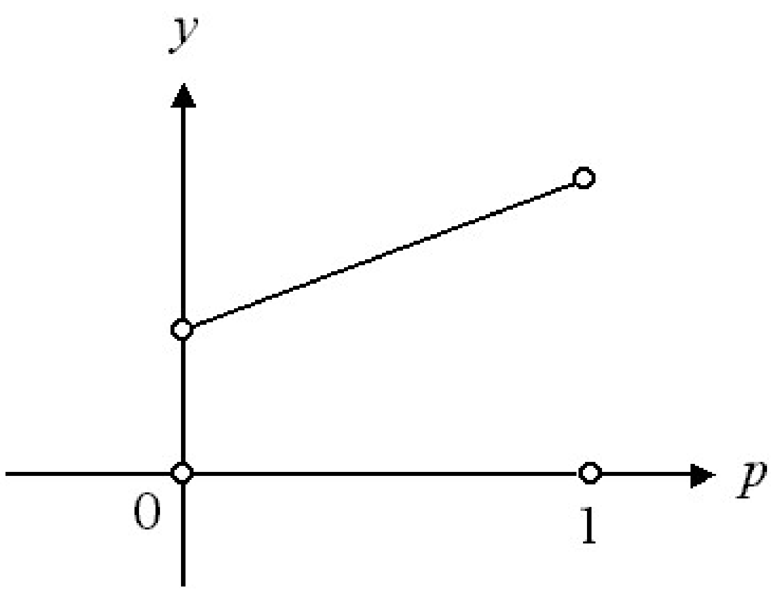
$$2(1-p^*)q^*r^* + 1p^*(1-q^*)(1-r^*)$$

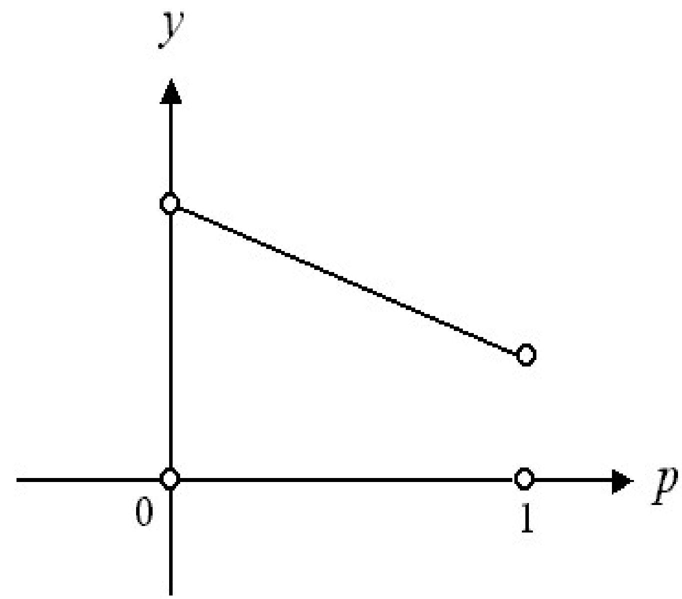
$$\geqq 2(1-p)q^*r^* + 1p(1-q^*)(1-r^*)$$

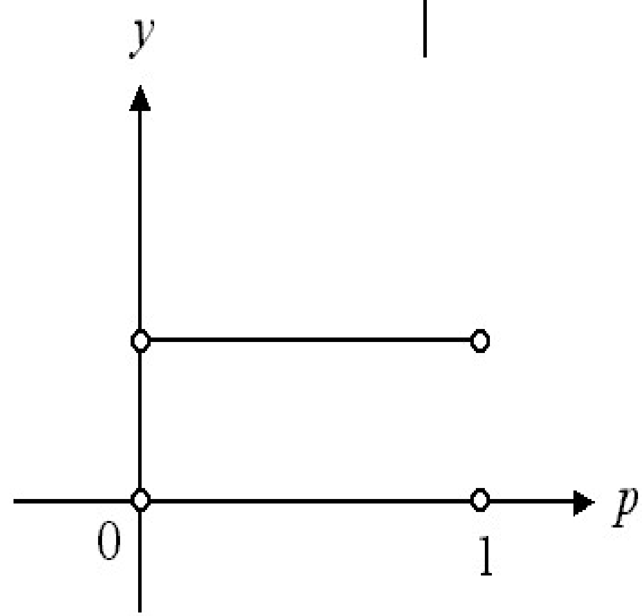
$$= [(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^*]p+2q^*r^*.$$

- p^* 為線性函數 $[(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^*]p+2q^*r^*$ 在 $0 < p < 1$ 中的極大值 (maximum)。

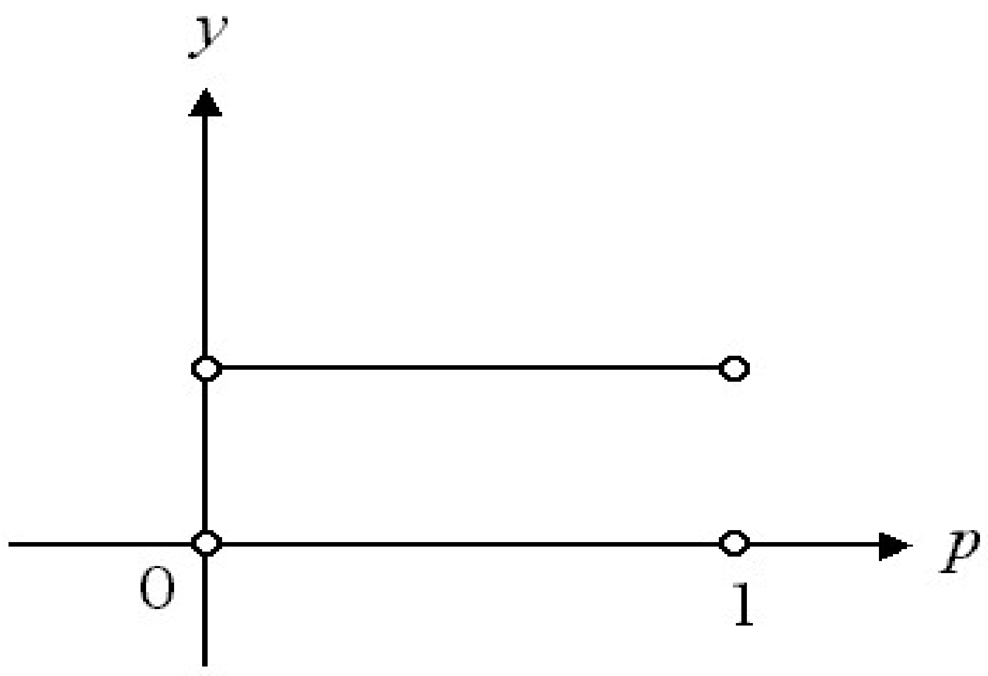
- $y = [(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^*]p+2q^*r^*$







- 只有當 (1-q*) (1-r*)-2q*r* = 0 時， [(1-q*) (1-r*)-2q*r*]p+2q*r* 才能取得極大值。
- 所以 (1-q*)(1-r*)-2q*r* = 0.



- $(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^* = 0.$
- 根據對稱性， 有

$$(1-p^*)(1-r^*)-2p^*r^* =0$$

$$(1-p^*)(1-q^*)-2p^*q^* =0.$$

- 這三條方程式的解為

$$p^* = q^* = r^* \doteqdot 0.4142.$$

- 所以「混合納殊均衡」應為各人均選擇約41% 豎起一隻手指， 59 %豎起兩隻手指。

齊威王田忌賽馬

比賽下去， 雙方都意識到要運用混合策略。

大將田忌

齊威王

	上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上
上中下	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
上下中	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
中上下	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
中下上	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
下上中	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
下中上	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

可以証明這個博弈的混合納殊均衡是齊威王和田忌，都以 1/6 的相同概率隨機選擇各自的六個純策略 。

納殊理論的應用

- 博弈論
- 演化生物學
- 拍賣
- 政治科學

博弈的種類

- 靜態與動態。
- 完全信息與不完全信息。
- 非合作與合作。
- 在「納殊均衡」的基礎上，引進適當的解。

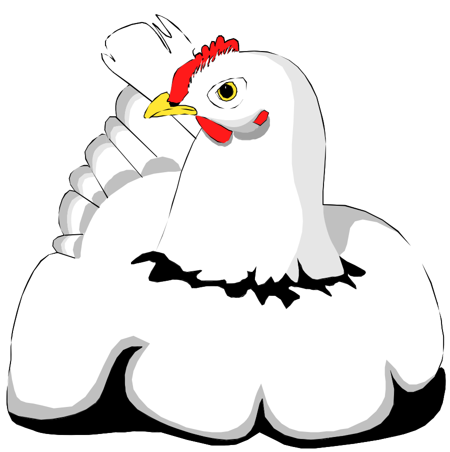
演化生物學

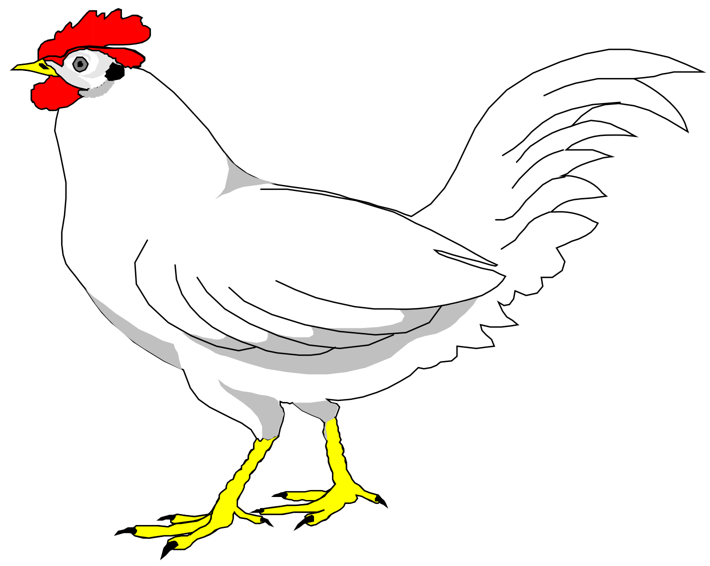
- 1973年，史密斯(Maynard Smith) 在研究演化生物學的問題時，引進了一個新概念——演化穩定策略(Evolutionary Stable Strategy)

- 演化穩定策略= 混合納殊均衡 + 穩定性條件

性比率

為什麼大多數兩性生物的性比率都非常接近一比一呢?

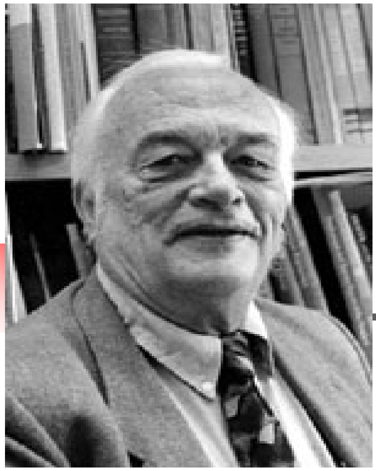




拍 賣

- 四種常見的拍賣形式分別為： 英國式、荷蘭式、 最高價密封、 次高價密封。

- 次高價密封拍賣由韋克瑞 **(William Vickrey)**引入， 用以令出價者願意揭露他們的真正估值。

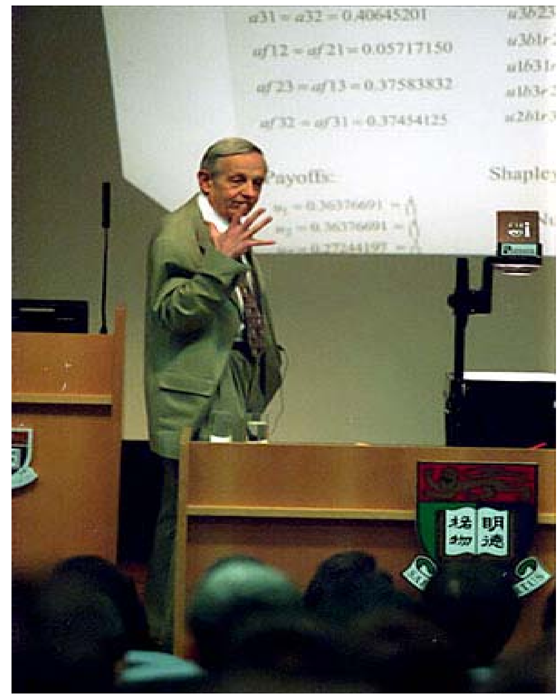


韋克瑞 (William Vickrey)

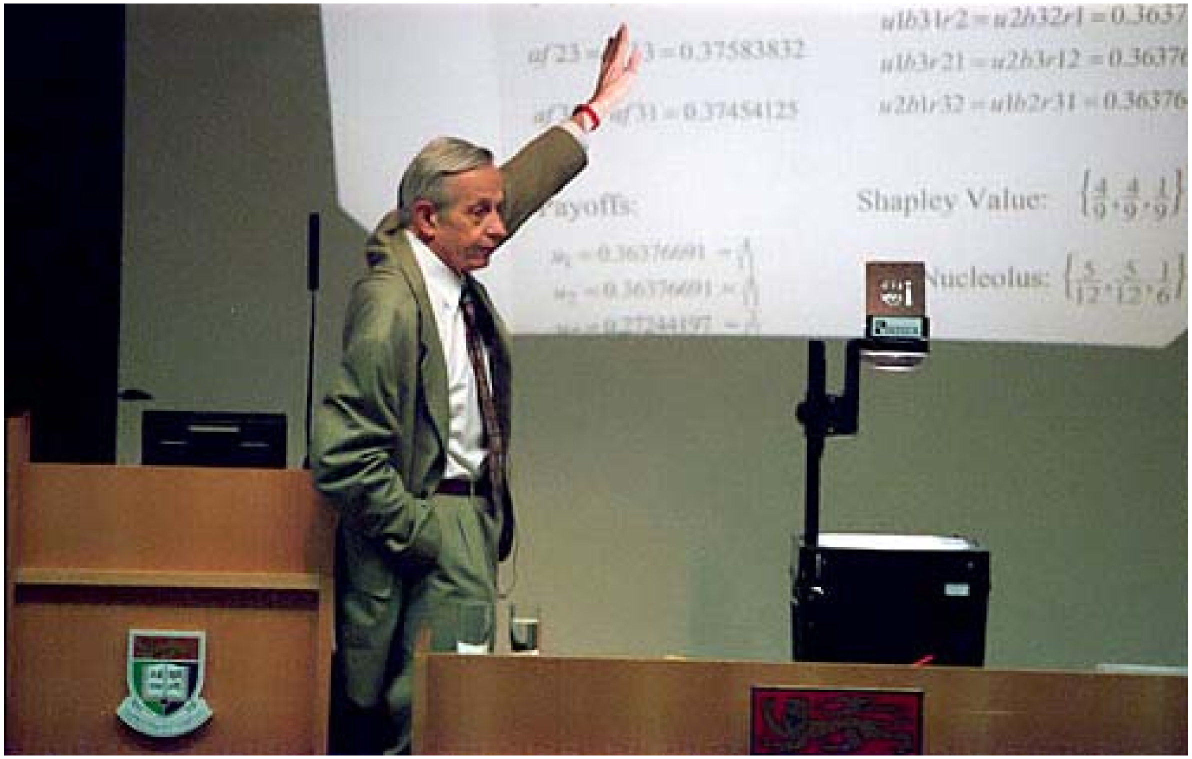
- 他運用「納殊均衡」去証明，如果每個人都不會因知道對手的估價而改變自己的估價， 則無論拍賣者用以上那一種拍賣方式， 其拍賣價都是一樣。
- 於**1996**年獲諾貝爾經濟學獎。

總 結

- 納殊的生平
- 博弈論的基本概念
- 納殊獲諾貝爾獎的工作
- 納殊工作的影響力



http://hkumath.hku.hk/~ntw/pub_lec.html



多謝！