



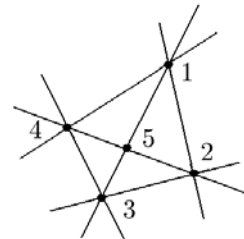
- 點和線是基本的幾何概念，看似簡單不過。以下兩道問題中的點和線是大家熟悉的平面上的點和直線，但要把事情說清楚，其實並不容易呢！（暫時說不清楚也不打緊，這個講座的討論重點並不在此。）

- (1) 平面上有 b 條線 ($b \geq 3$)，其中任意兩條線的相交點必定再有另外一條線通過。除卻全部線平行或者全部線通過一點這兩種情況，有沒有別的可能呢？
- (2) 平面上有 v 個點 ($v \geq 3$)，其中任意兩點決定的線必定再通過另外一點。除卻全部點在一條線上這種情況，有沒有別的可能呢？

- 點和線這兩項基本的數學概念，不單見諸於幾何。更一般地，點可用以表示某些數學對象，線可用以表示這些數學對象之間的關係。讓我們稍作“鬆綁”： $S = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ 是一個集合（或者索性記作 $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ ），裏面的元素叫做點； L 是由 S 的某些子集合構成的集合，那些子集合叫做線。我們依然要求以下兩項條件成立：(i) 每條線至少有兩個點，(ii) 任意兩個點在一條且僅一條線上。這樣的 (S, L) 叫做一個關聯幾何。

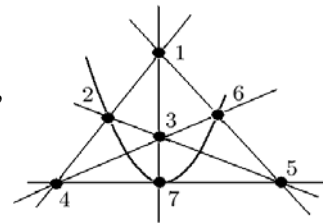
(例 1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$L = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \\ \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$$

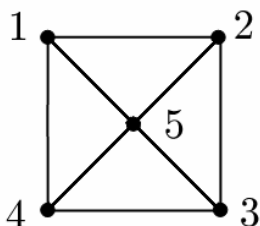


(例 2) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$L = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \\ \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}\}$$

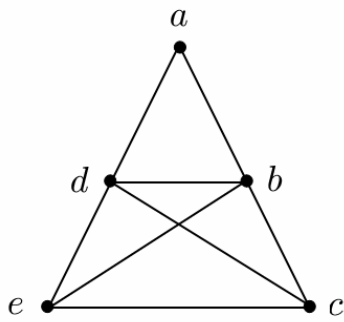


- (3) S 有 v 個點 ($v \geq 2$)， (S, L) 頂多有多少條線？ (S, L) 至少有多少條線？
- (4) S 有 v 個點 ($v \geq 2$)， (S, L) 可以有多少條線？共有多少個不同的 (S, L) ？(若關聯結構不變，只是把點和線重新命名，不算是不同的關聯幾何。例如以下兩個關聯幾何是相同的：



$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$L_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \\ \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$$



$$S_2 = \{a, b, c, d, e\}$$

$$L_2 = \{\{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, d, e\}\}$$

對應關係是 $1 \leftrightarrow b, 2 \leftrightarrow d, 3 \leftrightarrow c, 4 \leftrightarrow e, 5 \leftrightarrow a$ 。

• 德布魯恩 — 愛爾特希 (de Bruijn-Erdős) 定理 (1948)

(S, L) 是一個關聯幾何，它有 v 個點和 b 條線，且 $b > 1$ ，則 $b \geq v$ 。如果 $b = v$ ，那麼任意兩條線必定有相交點，而且只有兩種情況：(i) 有一條線有 $v - 1$ 個點，其他的線只有兩個點；(ii) 每條線有 k 個點，每個點在 k 條線上， $k \geq 3$ 。

(5) 有沒有 (S, L) ，它有 9 個點，12 條線，而且每條線有 3 點？

(提示：  再添加一些線。)

(6) 有沒有 (S, L) ，它有 10 個點，15 條線，而且每條線有 3 點？

• 斯坦納 (Steiner) 三元系 = 一個有限關聯幾何，有 v 個點， b 條線，而且每條線有 3 個點。

柯克曼 (Kirkman) 十五名女生問題 (1850)：

15 名女生每天出外散步，3 人一排。能不能作出一個編組，使得任意兩個女生在一星期七天當中在同一排出現一次且僅一次？

• (有限)射影平面 = 一個(有限)關聯幾何，其中任意兩條線必定有相交點。(為了撇開某些平凡情況不論，我們假設至少有四個點，當中任意三點不在同一條線上。)

試在這份摘要中找出一個射影平面的例子。有限射影平面的點和線的數目有什麼關係呢？為什麼叫做射影平面呢？

• 歐拉 (Euler) 三十六名軍官問題 (1779)：

有 6 個軍團，從每個軍團選 6 名不同軍階的軍官。怎樣把這 36 名軍官排成六行六列，使每行每列都有六名不同軍階且隸屬不同軍團的代表？

(這個問題與有限幾何有什麼關係呢？)

• 什麼叫做組合設計？有什麼應用呢？