拍賣中尋對策

吳端偉
香港大學數學系

6-12-2008

http://hkumath.hku.hk/~ntw/pub_lec.html

內 容

- 博弈論(Game Theory)淺介。
- 上策均衡 (Dominant Strategy equilibrium)。
- 拍賣策略。
- 拍賣設計。
- 理性Vs非理性。

什麼是博弈論?

- Game Theory :
  - 遊戲理論、賽局論、
  - 對策論、博弈論。

- Game : 遊戲、賽局、博弈。

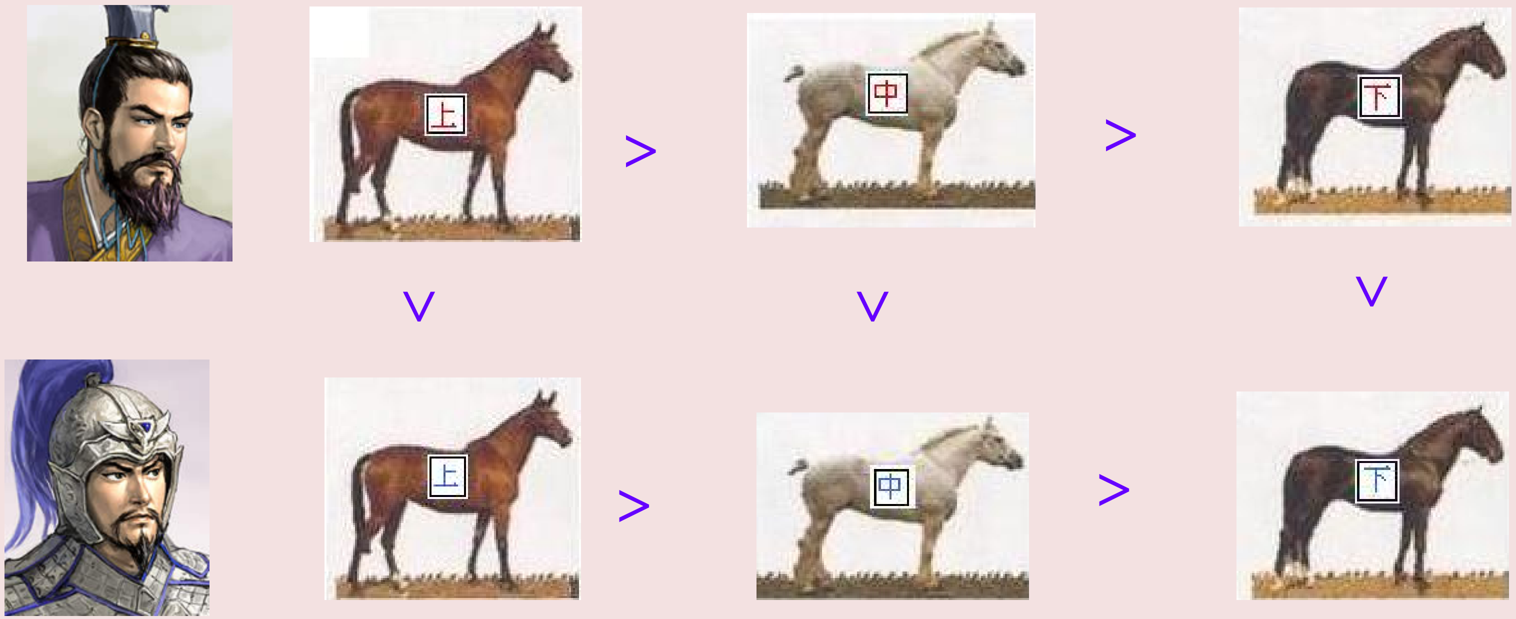
什麼是博弈論?

- 博弈論嘗試爲理性決策者之間的衝突與合作建立數學模型。

- 它研究每一個理性決策者將如何根據其他對手的策略，去作出最有利自己的策略。

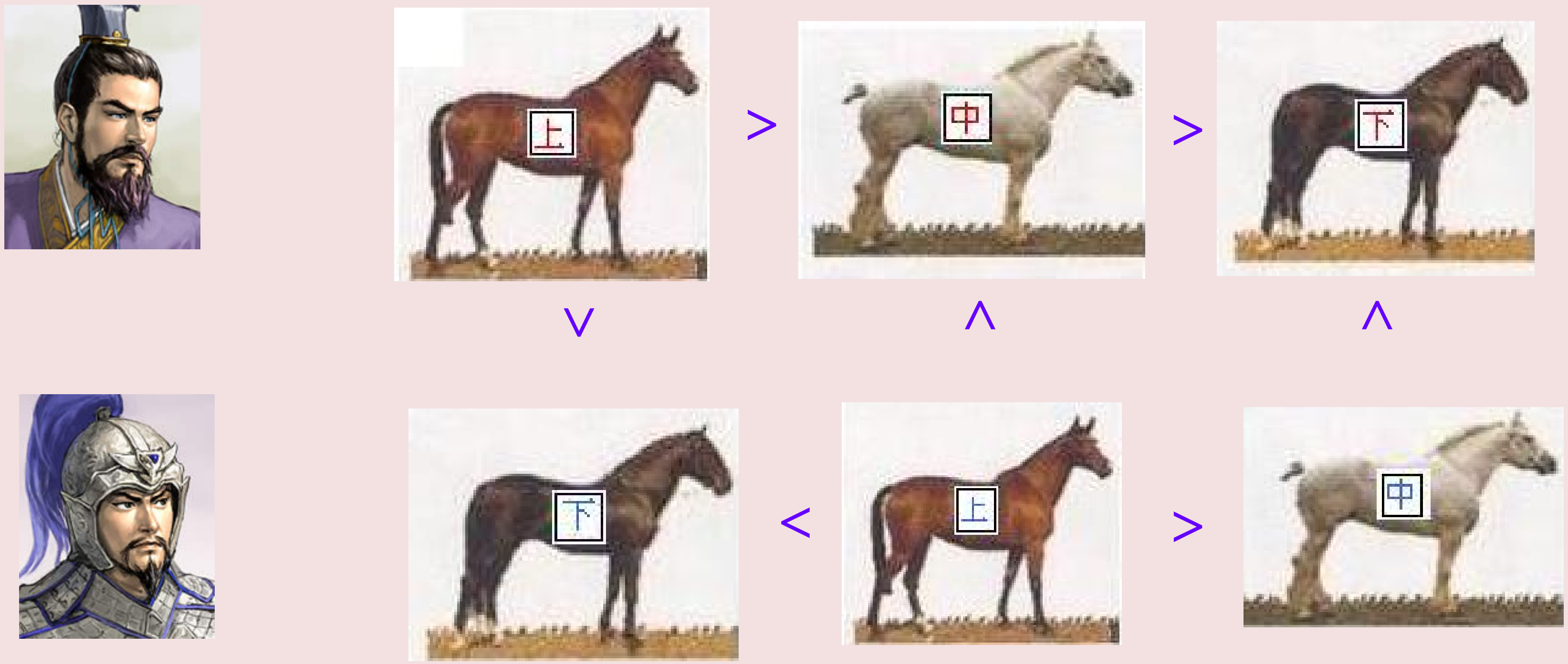
賽馬博弈

齊威王與大將田忌各擁三匹賽馬，質素如下。



每次雙方各出三匹馬，一對一比賽三場，
每一場負方要賠一千斤銅給勝方。

田忌每次都連輸三場。
後來他用以下策略才能反敗爲勝。



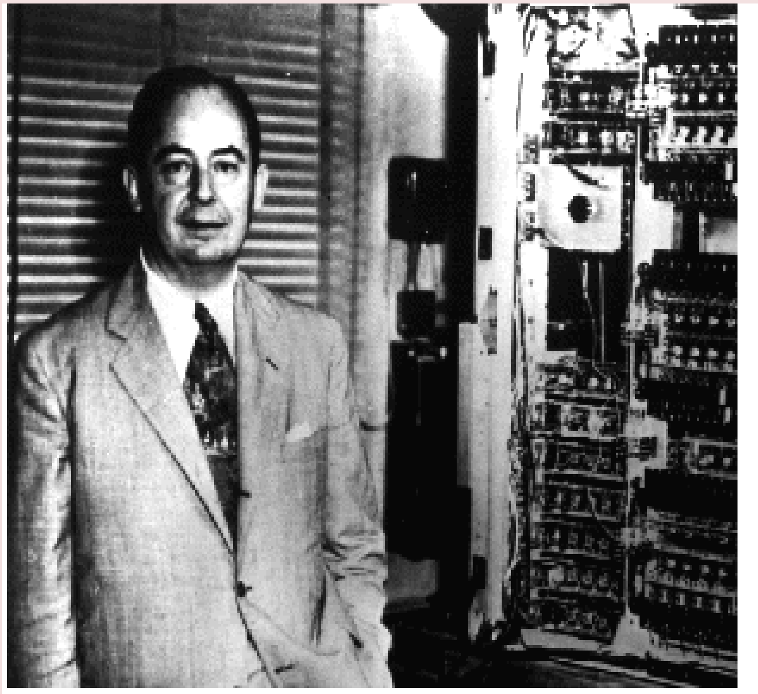
- 比賽下去，雙方都意識到不能用單一的策略。
- 雙方都要用混合策略，例如田忌用$(\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$ 。
- 「博弈論」嘗試推斷出雙方將用何種混合策略。

大將田忌

齊威王		上中下	上下中	中上下	中下上	下上中	下中上
	上中下	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1
	上下中	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1
	中上下	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1	1, -1	1, -1
	中下上	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3	1, -1	1, -1
	下上中	1, -1	1, -1	1, -1	-1, 1	3, -3	1, -1
	下中上	1, -1	1, -1	-1, 1	1, -1	1, -1	3, -3

馮・諾伊曼(John von Neumann)

- 博弈論是數學家馮・諾伊曼於1928年所創立。
- 生於1903，匈牙利。
- 曾參與原子彈的創造。
- 設計及建造第一部電腦。



馮 · 諾伊曼

- 被譽為最後一個數學全才，在幾個數學和理論物理的分支做了很多基礎性的工作。

馮 · 諾伊曼

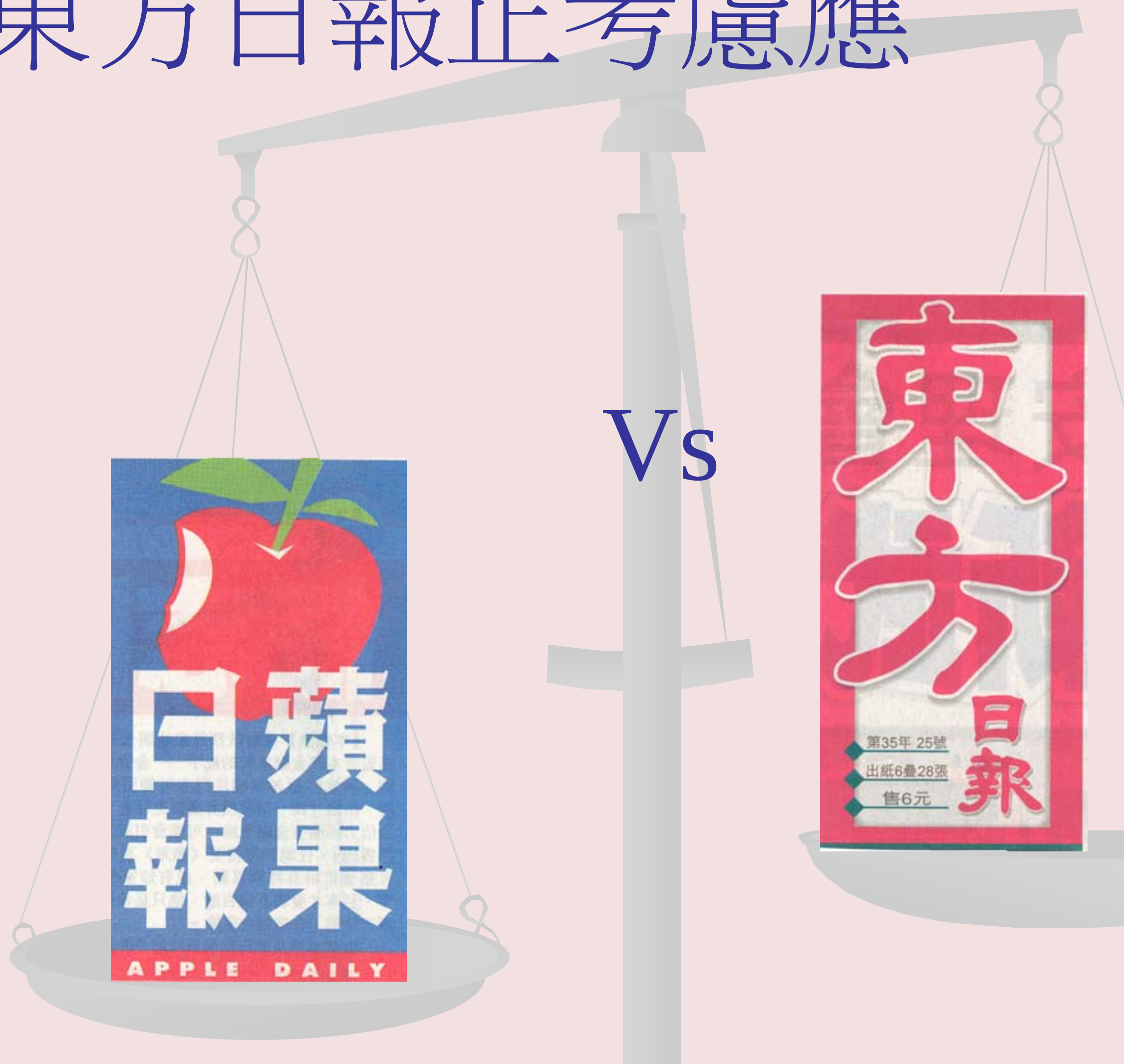
- 當馮‧諾伊曼在1928年創立博弈論時，它只是純數學的一個分支。
- 他與經濟學家摩根斯坦(Oskar Morgenstern)於1944年合作撰寫了＜博弈論的經濟行為＞(Theory of Games and Economic Behavior)。

博弈論與經濟學

- 博弈論研究人們如何根據其他對手的策略，去作出最有利自己的策略。
- 由於經濟活動往往涉及策略的運用，博弈論因而大派用場。

報章減價戰

蘋果日報與東方日報正考慮應否減價　。



- 兩報可分別選擇減價或不減價。
- 假設兩報都不減價，則各可賺取二千萬。
- 若己方減價而對手不減價，則己方可賺取三千萬而對手則只能賺到五百萬。

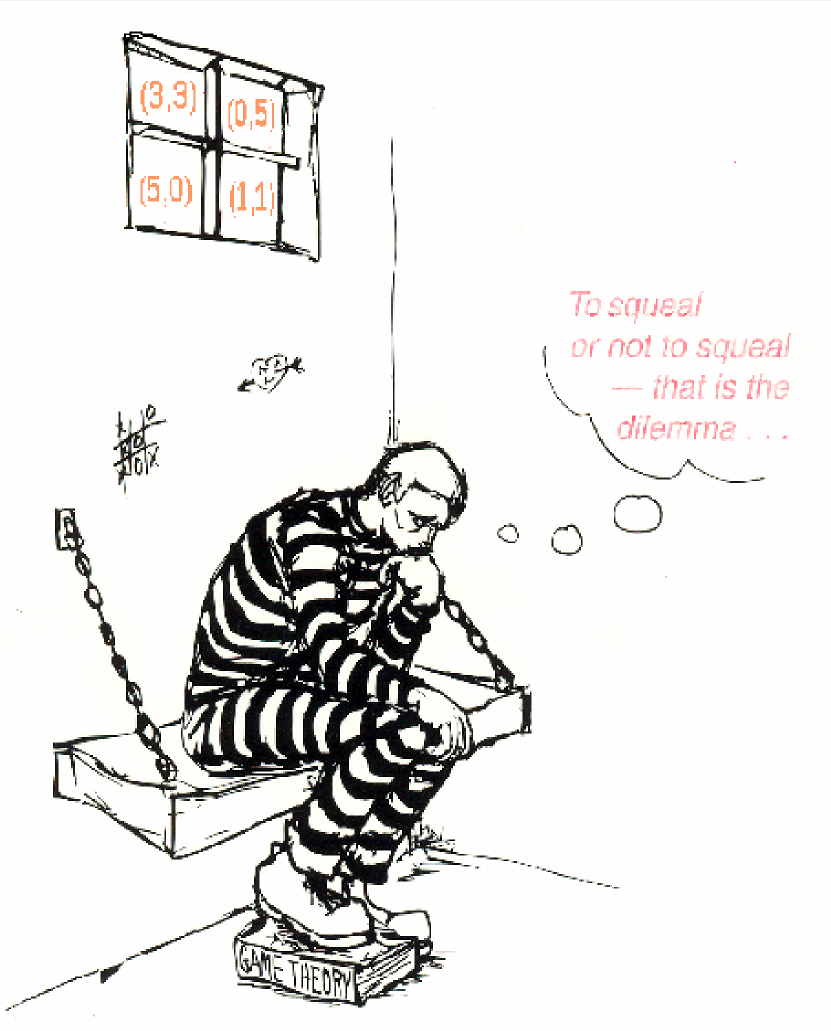
若兩報同時減價，則各可賺取一千萬。

		東方日報	
		減價	不減價
蘋果日報	減價	1, 1	3, 0.5
	不減價	0.5, 3	2, 2

蘋果 : (減 , 不減) > (不減 , 不減) > (減 , 減) > (不減 , 減)

東方 : (不減 , 減) > (不減 , 不減) > (減 , 減) > (減 , 不減)

疑犯困境 (Prisoners' Dilemma)



- 甲與乙被警方以藏械罪名拘捕。警方懷疑他們正準備持械行劫。兩人被單獨囚禁和盤問。
- 如果二人都承認意圖行劫，每人將被判入獄三年。
- 如果他們都不承認，則各判入獄一年。
- 如果一人否認而另一人承認，並且願意作證，那否認者將被判入獄五年，而承認者則可獲釋放。

疑犯困境

		乙	
		認罪	不認罪
甲	認罪	3, 3	0, 5
	不認罪	5, 0	1, 1

甲：(認，不認) > (不認，不認) > (認，認) > (不認，認)

乙：(不認，認) > (不認，不認) > (認，認) > (認，不認)

兩例的共同點

- 有兩個參與者，A 和 B。
- 每個參與者都有兩個策略，C 和D。
- 共有四個策略組合：

  (C, C)，(C, D) , (D, C), (D, D) 。
- 雙方都知道各策略組合的得失。

		東方日報 (B)	
		減價 (C)	不減價 (D)
蘋果日報 (A)	減價 (C)	1, 1	3, 0.5
	不減價 (D)	0.5, 3	2, 2

		乙 (B)	
		認罪 (C)	不認罪 (D)
甲 (A)	認罪 (C)	3, 3	0, 5
	不認罪 (D)	5, 0	1, 1

參與者 A 和 B 根據各決策組合的得失， 得到以下決策組合的優先次序。

參與者 A : $(C, D) > (D, D) > (C, C) > (D, C)$

參與者 B : $(D, C) > (D, D) > (C, C) > (C, D)$

- 參與者 A : $(C, D) > (D, D) > (C, C) > (D, C)$
- 參與者 B : $(D, C) > (D, D) > (C, C) > (C, D)$

- 如果我們能根據以上資料，分析出 A 和 B 的選擇，則可把結果應用到以上兩例。
- 我們將看到 A 和 B 都會選C ，雖然他們都知道 $(D, D) > (C, C)$ 。

何謂博弈?

- 前兩例都是博弈論 (Game Theory)裏博弈(game) 的例子。
- 每個博弈(game)是由以下四個條件來界定。

博弈的界定

1. 參與者的數目。
2. 參與者各自可選擇的全部策略。
3. 所有可能出現的策略組合。
4. 各參與者在每個策略組合的得失。

最後通牒博弈 (Ultimatum Game)

如果有現金一百元，無條件送給你跟另一個不認識的人去分配，你有優先權決定自己要拿多少，剩下的給對方，但是對方可以選擇接受或不接受剩下的錢。

如果對方接受，你可以拿到你想要的，譬如八十或五十元；不過，如果對方不認同你的分法，很抱歉，兩個人誰一毛錢都拿不到。

你會怎麼分配這一百元?

博弈的解
(Solution of a game)

- 對每一個博弈，我們都希望知道每個參與者將如何決策。
- 所有參與者的最後決策便構成博弈的解 (solution of a game) 。
- 試找出「疑犯困境」的解。

如何找出博弈的解

假設甲認罪，乙應該如何決策?

		乙	
		認罪	不認罪
甲	認罪	3, 3	0, 5
	~~不認罪~~	~~5, 0~~	~~1, 1~~

如何找出博弈的解

假設甲不認罪，那麼乙應該怎樣做?

		乙	
		認罪	不認罪
甲	~~認罪~~	~~3, 3~~	~~0, 5~~
	不認罪	5, 0	1, 1

上策(Dominant Strategy)

- 無論其他對手怎樣選擇，這個策略給某參與者帶來的得益，都比任何其他策略爲高。
- 乙和甲的上策都是認罪。
- 若乙與甲都是理性的，則他們都會選擇認罪。

博弈的解(結果)

		乙	
		認罪	不認罪
甲	認罪	3, 3	0, 5
	不認罪	5, 0	1, 1

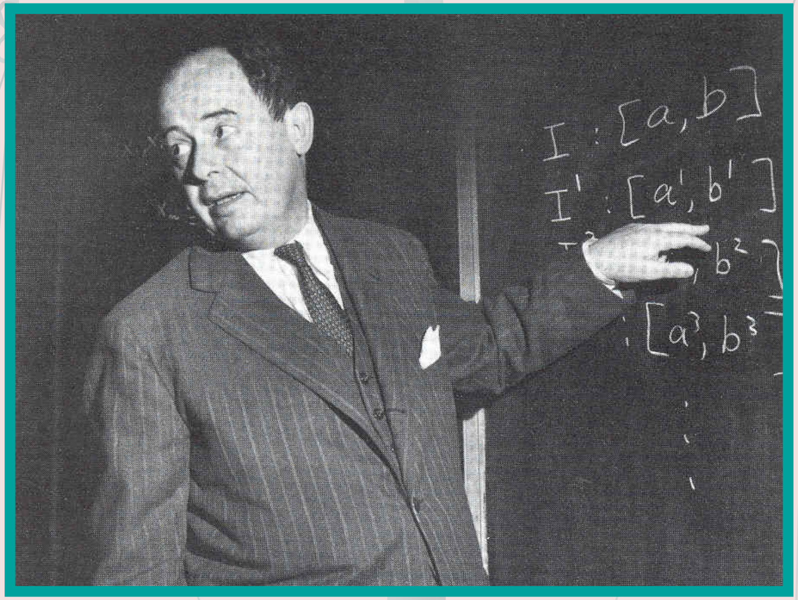
上策均衡
(Dominant Strategy Equilibrium)

- 如果每個參與者都有一個上策，則他們都會選擇其上策，我們因而得知博弈的結果。

- 如果每個參與者都選擇其上策，則這個策略組合稱爲「上策均衡」。

上策均衡的存在

- 馮•諾伊曼証明了對一類特殊的二人博弈，「零和博弈」(zero-sum game) ，上策均衡必定存在。
- 可是對大部份的博弈，上策均衡都不存在。



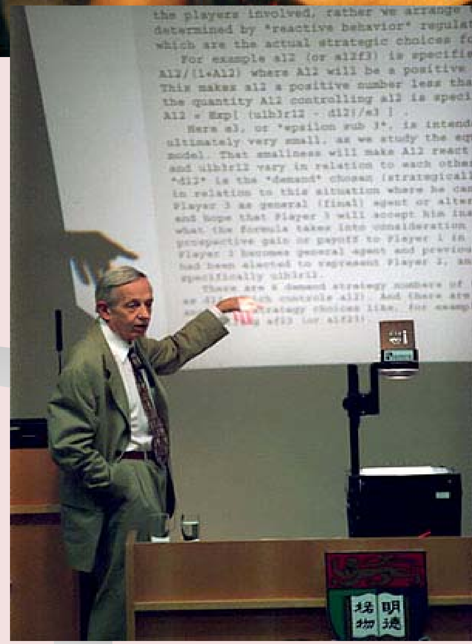
當上策均衡都不存在時，我們應該怎麼辦呢?

- 嘗試爲每個博弈引入比「上策均衡」更一般的解的概念，並証明每個博弈都最少要有一個這樣的解。

有你終生美麗
A Beautiful Mind

ALICIA NASH

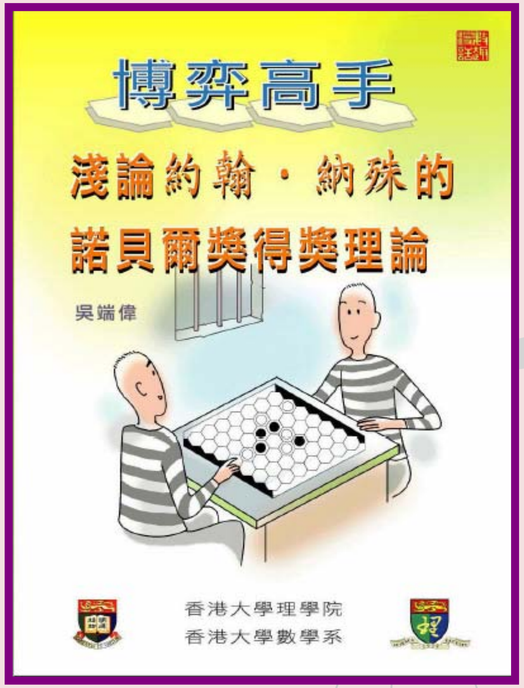
John Nash
約翰納殊



納殊如何獲得諾貝爾經濟學獎?

- 在約翰納殊(John Nash) 的博士論文裏，他引入了現稱爲混合納殊均衡 (**mixed Nash equilibrium**)的概念。它是一種比上策均衡更一般的解。

- 納殊証明，一般地，每個博弈都最少要有一個混合納殊均衡。



http://hkumath.hku.hk/~ntw/NgTWbook.pdf

- Martin J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, 2002.

http://www.economics.utoronto.ca/osborne/igt/index.html

博弈理論的應用

- 演化生物學
- 政治科學
- 拍賣

拍賣

- 拍賣是分配物品或資源的一種方法。
- 所有拍賣都是價高者得。
- 出價最高者一般(但不一定)需以他的出價來購買拍賣品。
- 快速和公平 。
- 獲得拍賣品的估值。

拍賣的歷史

- 拍賣活動大概有二千五百年歷史。
- 有証據顯示古希臘人曾以拍賣來分配女人和收稅權。
- 在中世紀的歐洲，大量不同的物品(包括奴隸)都以拍賣的方式出售。
- 到了十八世紀，大型的拍賣行紛紛成立。

拍賣的歷史

- 今天網上拍賣活動十分方便和普及。
- eBay及淘寶網爲其中兩間最大的網上拍賣公司。
- 博弈論可幫助競投者分析在不同形式的拍賣裏，怎樣作出對自己最有利的出價。

拍賣機制

密封 (Sealed-bid)

最高價

次高價

開叫 (Outcry)

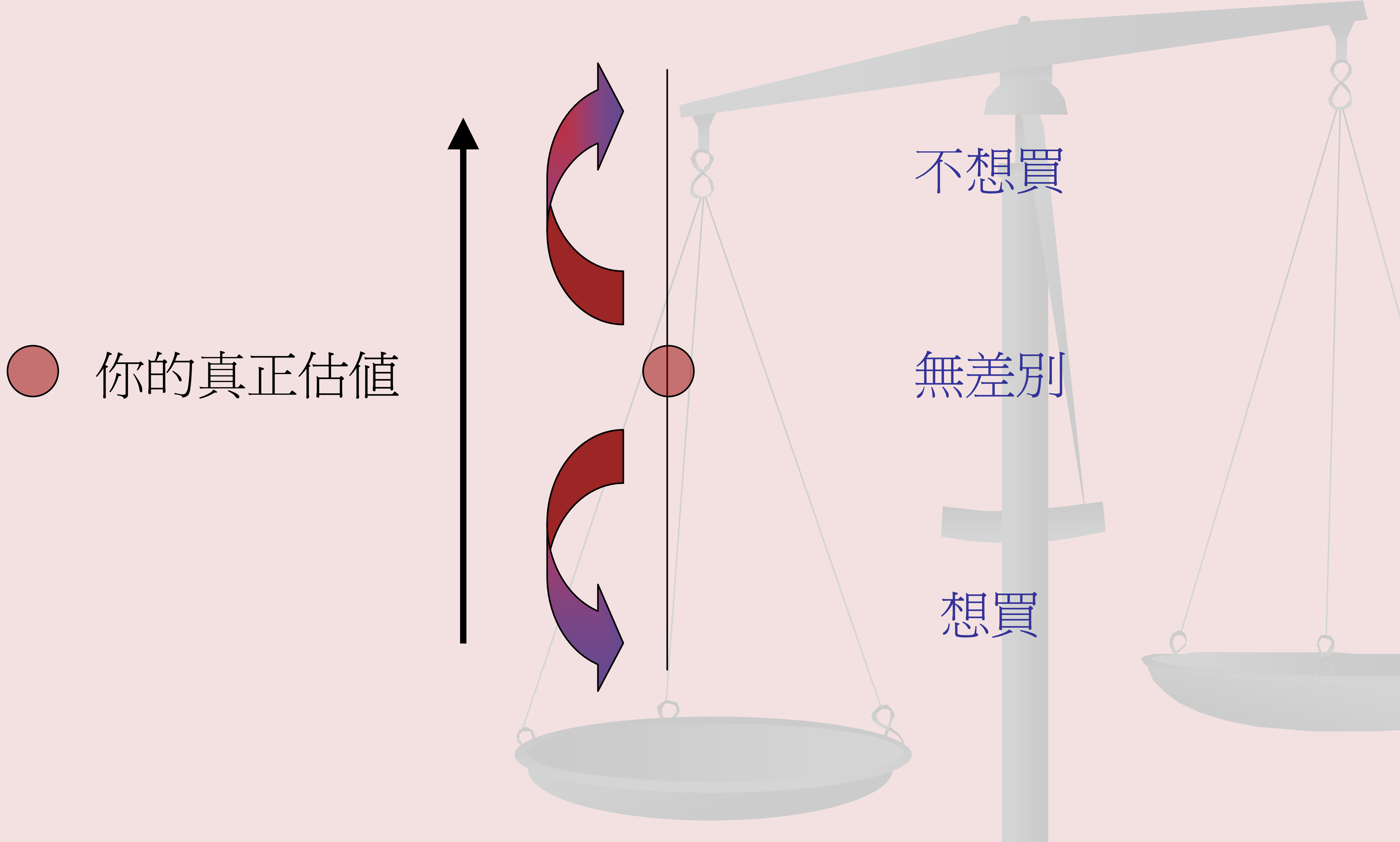
上升

下降/逆向

拍賣品的價值

私人價值(private value) Vs 共有價值(common value)

競投者對拍賣品的真正估值

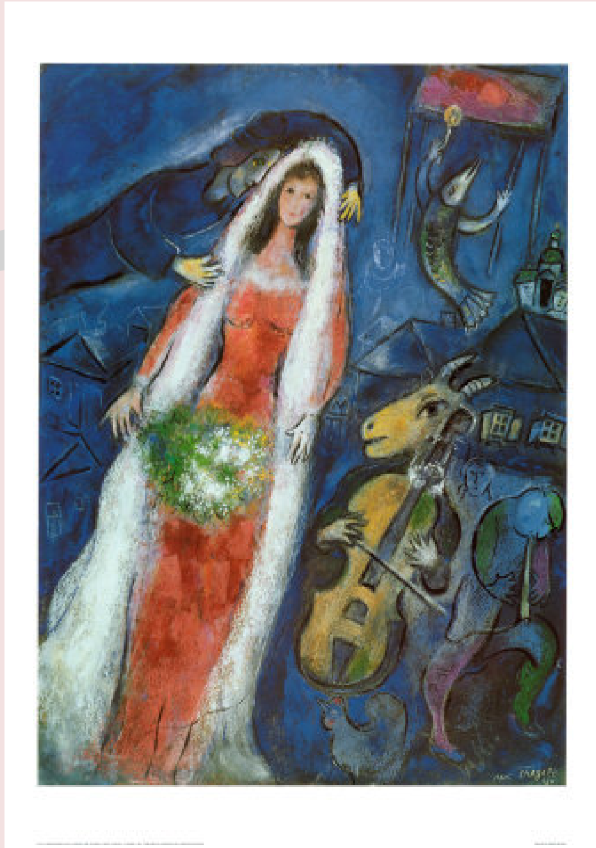


拍賣品的價值

- 私人價值(private value)：

  若是競投者對拍賣品的真正評價獨立於其他競投者的評價，而且此價值只有競投者自己知道，我們即稱此拍賣品具有私人價值。

- 例子: 藝術品



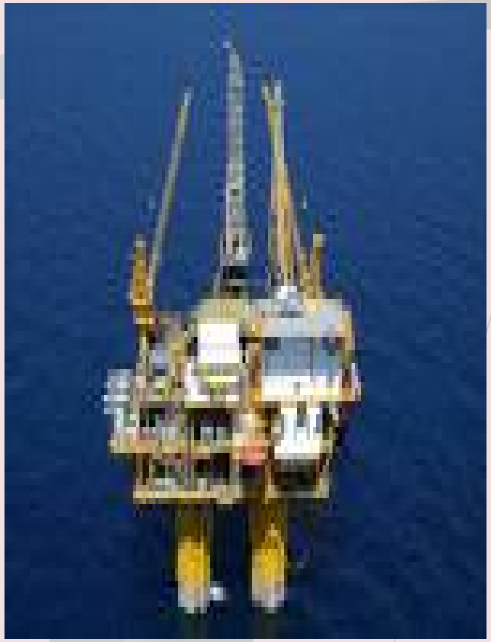
Marc Chagall, 1887-1985

拍賣品的價值

- 共有價值(common value):

若不管誰得標，對任何競投者的價值都大約相同，只是估測值不同而已，我們則稱此競投品具有共有價值。

例子: 油田



Yellow Sea Offshore Oil Field

贏家的詛咒 (Winner’s Curse)

- 贏家的詛咒一般在競投共有價值物品時出現。
- 它指出

贏家一般都出價過高

拍賣形式

- 四種常見的拍賣形式分別為：

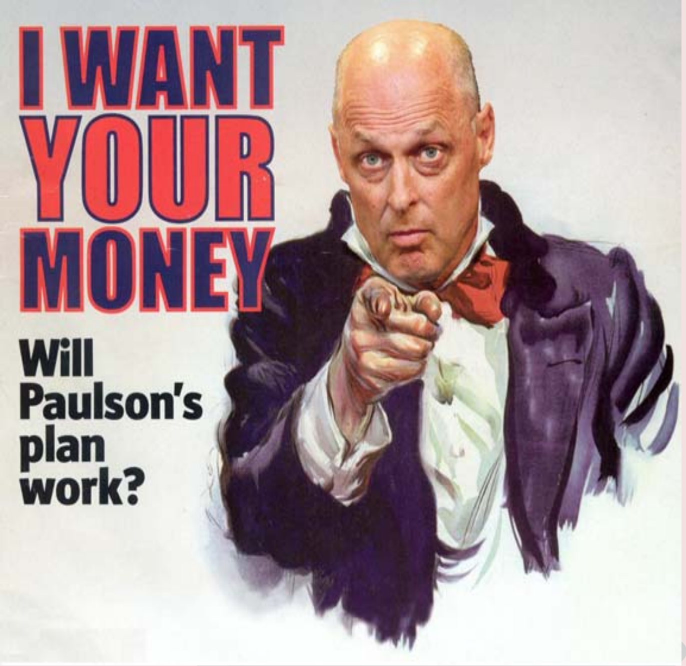
- 英國式(English auction)
- 荷蘭式(Dutch auction)
- 最高價密封式(Sealed first price auction)
- 次高價密封式(Sealed second price auction)

拍賣形式

- 英式拍賣:拍賣者會設定一個最低的加價額度，競投者不斷地加價，當無人再加價時，拍賣即告結束，是最常見的拍賣形式。
- 荷蘭式拍賣:拍賣者先宣告一個價格，然後逐步降價，一直到有人接受所宣告的價格爲止。接受宣告價格的競投者就是贏家，支付宣告的價格。例子有荷蘭花卉拍賣。

逆向式拍賣

- 2004年Google IPO。
- 例如最近美國財長保爾森便提出以逆向式拍賣來爲次按風暴中的問題資產定價。



拍賣形式

- 最高價密封式拍賣: 所有競投者同時送出競投價，任何競投者在決定標金時，並不清楚其他競投者的標金。由出最高價者得標。

- 次高價式密封式拍賣: 由出最高價者得標，支付第二高標的價格。
- 例子: eBay 拍賣。

最高價密封式拍賣

WINNER!
Pays $700

次高價密封式拍賣

WINNER!
Pays $500

- 在eBay拍賣，所有密封的投標價必須在一固定的時間前提交。
- 最後成交價是第二最高出價的一個很小的增量。

次高價密封式拍賣的上策

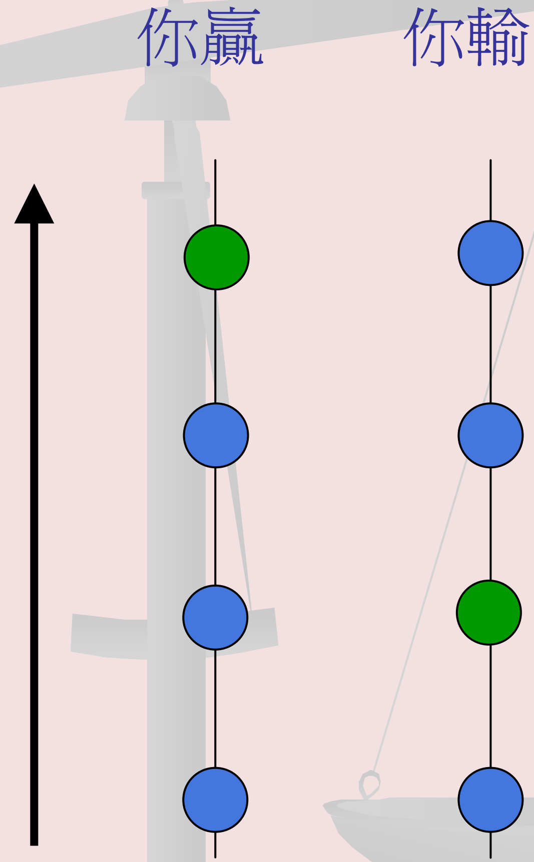
- “eBay always recommends bidding the absolute maximum that one is willing to pay for an item early in the auction.”

  (eBay.com, 2002)
- 誠實爲上策？ (Honesty is the best policy ?)
- 贏家詛咒? (Winner’s curse ?)
  - 誠實出價是上策因爲

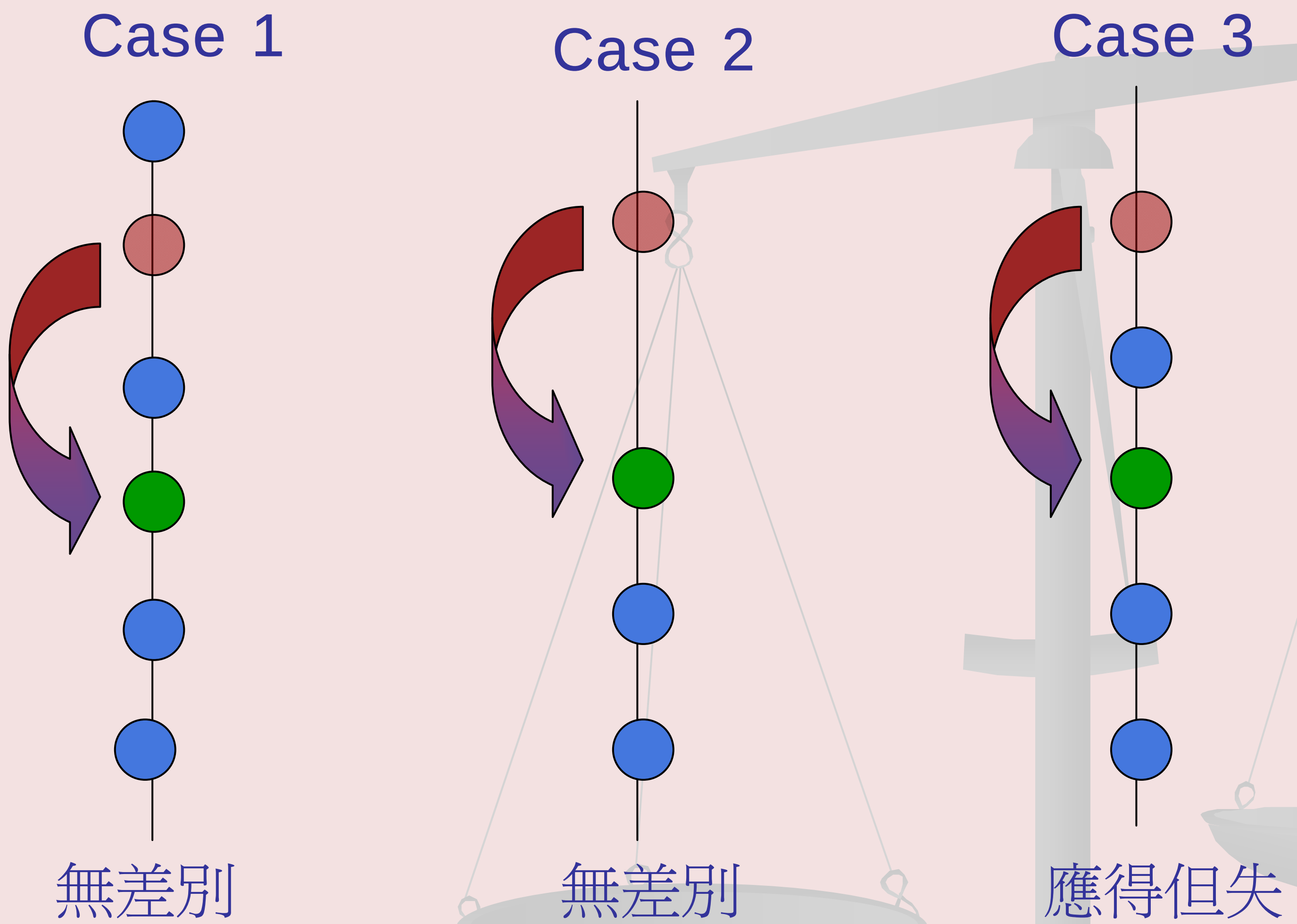
贏家所支付的金額是不依賴於其出價

次高價密封式拍賣的上策

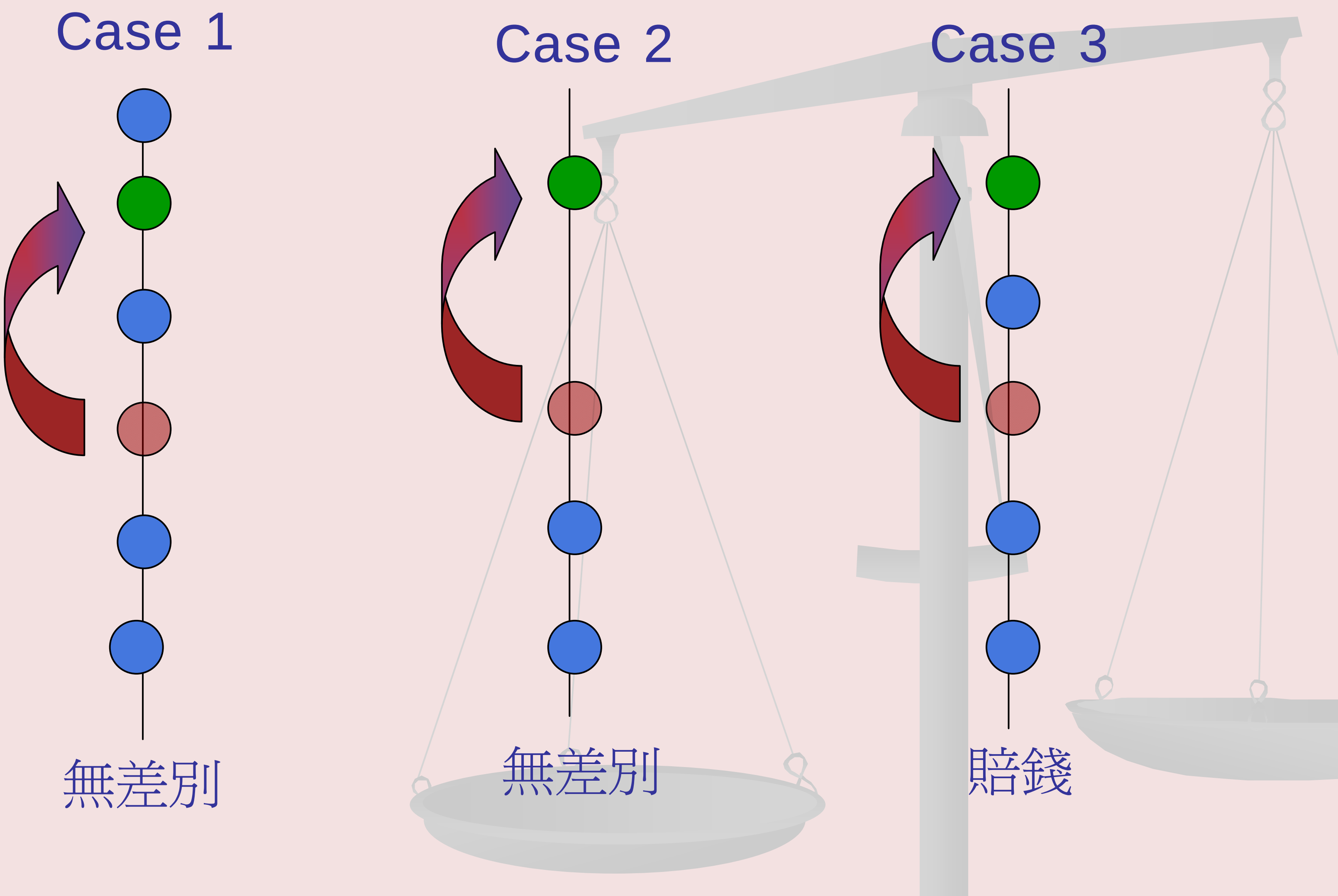
- 你的真正估值
- 你的出價
- 其他人的出價



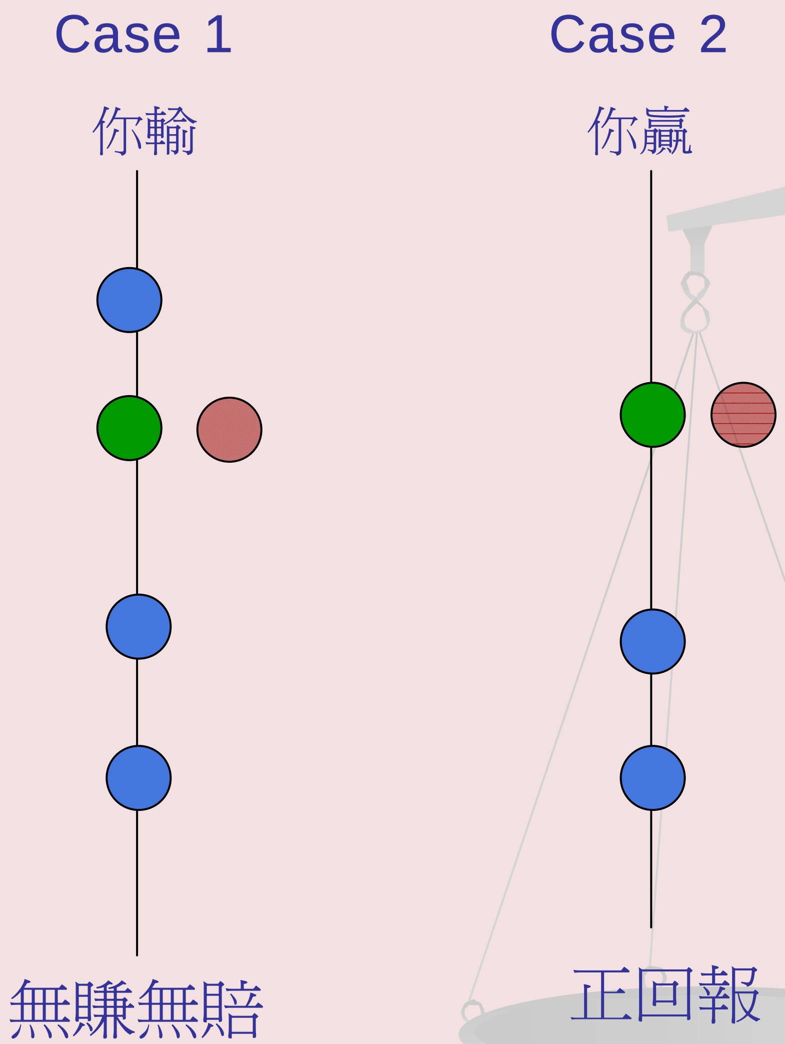
出價低於自己的真正估值



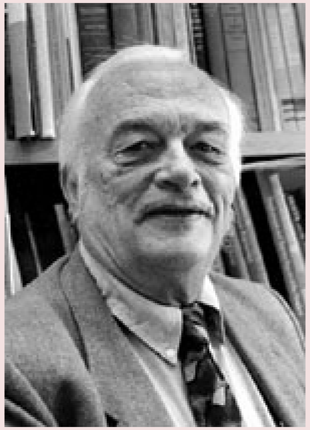
出價高於自己的真正估值



誠實出價是上策



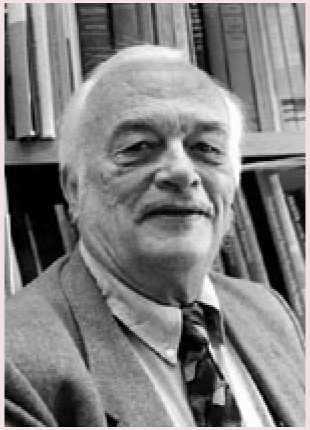
每個人都誠實出價是一個上策均衡



韋克瑞 (William Vickrey) (1914-1996)

- 次高價密封式拍賣由韋克瑞 (William Vickrey)在以下論文引入

"Counterspeculation and Competitive Sealed Tenders." *Journal of Finance*. 16:1, pp. 8-37, 1961.



韋克瑞 (William Vickrey) (1914-1996)

- 次高價密封式拍賣由韋克瑞 (William Vickrey)引入， 用以令出價者願意揭露他們的真正估值。
- 賣方願意用次高價密封式拍賣嗎?

收入等價定理
(Revenue Equivalence Theorem)

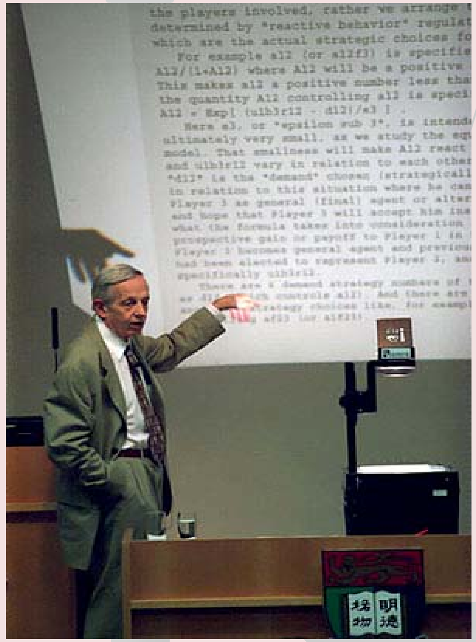
- 韋克瑞証明如果每個人都不會因知道對手的估價而改變自己的估價，競投者的真正價值來自同一的概率分佈，則無論拍賣者用以上那一種拍賣方式， 其拍賣價都是一樣。
- 於1996年獲諾貝爾經濟學獎。

Winner's Curse !!!

Mathematics, Economics and Finance

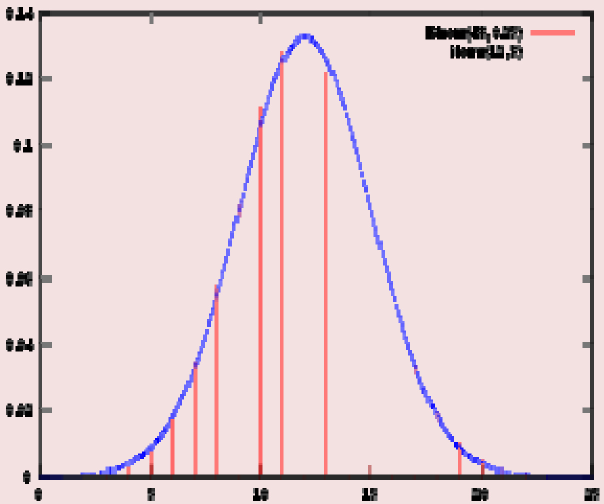
諾貝爾經濟學獎: 過去的十七年中，31獲獎者中有14人有數學學位

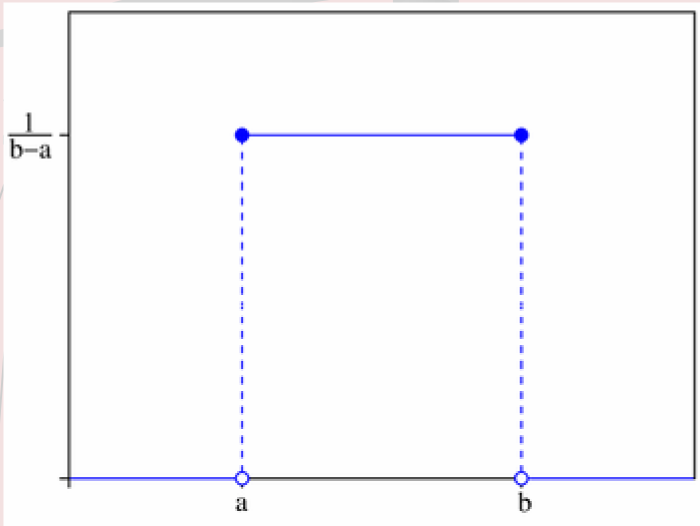
- **2007 Eric S. Maskin (BS in math)**
- **2005 Robert J. Aumann (BS, MS, PhD in math)**
- **2004 Edward C. Prescott (BA in math, MS in operations research)**
- **2003 Clive W. J. Granger (BA in math)**
- **2002 Daniel Kahneman (BA in math and psychology)**
- **2001 Michael Spence (BA, MA in math)**
- **2000 James J. Heckman (BA in math)**
- **1998 Amartya Sen (BA minor in math)**
- **1997 Robert C. Merton (BS, MS in applied math)**
- **1996 James A. Mirrlees (MA in math)**
- **1996 William Vickrey (BS in math)**
- **1994 John F. Nash Jr. (PhD in math)**
- **1994 Reinhard Selten (PhD in math)**
- **1992 Gary S. Becker (BA in math)**



簡化和假設

- 假定第 i 個競投者的真正估值爲v_i而其出價爲b_i 。
- 競投者的真正估值v_i來自同一的概率分佈。





- 假定$v_1 > \ldots > v_n$ ，如果 $b_j = b_k$及 $j < k$，那麼定第 j 個競投者贏。
- 設 ε 爲每次出價的最低的加價額度。

荷蘭式拍賣

- 拍賣者先宣告一個價格，然後逐步降價，一直到有人接受所宣告的價格爲止。
- 接受宣告價格的競投者就是贏家，並支付宣告的價格。
- 第 i 個競投者的回報爲

$$\begin{cases} v_i - b_i & \text{if bidder } i \text{ wins} \\ 0 & \text{if bidder } i \text{ loses} \end{cases}$$

最高價密封式拍賣

- 所有競投者同時送出競投價，由出最高價者得標和支付宣告的價格。
- 第 i 個競投者的回報爲

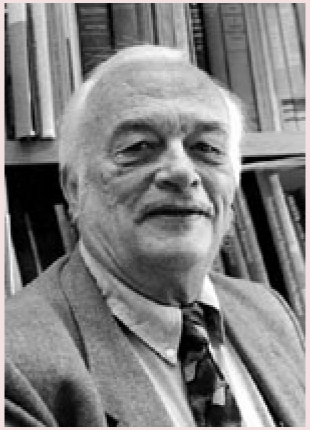
$$\begin{cases} v_i - b_i & \text{if bidder } i \text{ wins} \\ 0 & \text{if bidder } i \text{ loses} \end{cases}$$

策略性等價(Strategically Equivalence)

- 在荷蘭式拍賣和最高價密封式拍賣中
  - 選擇勝方的標準相同：出價最高者勝
  - 競投者的回報函數相同：

$$\begin{cases} v_i - b_i & \text{if bidder } i \text{ wins} \\ 0 & \text{if bidder } i \text{ loses} \end{cases}$$

- 從博弈論的角度，他們可以看作相同的博弈。



William Vickrey's question

- 能找到一個和英式拍賣策略性等價的密封式拍賣程序嗎？

- 答案: 次高價密封式拍賣

英式拍賣

- 拍賣者會設定一個最低的加價額度 ε ，競投者不斷地加價，當無人再加價時，拍賣即告結束。
- 通常最終只有兩個人相互競爭.
- 假設其一出價 b, 另一方需出價 $b+\varepsilon$ 贏得拍賣。
- 如果 ε 非常小 (小於 b 許多)，第 i 個競投者的回報差不多爲

$$\begin{cases} v_i - b & \text{if bidder } i \text{ wins} \\ 0 & \text{if bidder } i \text{ loses} \end{cases}$$

注意 b 爲次高價 !!!

次高價密封式拍賣

- 所有競投者同時送出競投價，由出最高價者得標和支付第二高標的價格。
- 第 i 個競投者的回報爲

$$\begin{cases} v_i - b & \text{if bidder } i \text{ wins} \\ 0 & \text{if bidder } i \text{ loses} \end{cases}$$

注意 b 爲次高價 !!!

策略性等價(Strategically Equivalence)

- 在英式拍賣和次高價密封式拍賣中
  - 選擇勝方的標準相同：出價最高者勝
  - 競投者的回報函數相同：

$$\begin{cases} v_i - b & \text{if bidder } i \text{ wins} \\ 0 & \text{if bidder } i \text{ loses} \end{cases}$$

- 從博弈論的角度，他們可以看作相同的博弈。

英式拍賣 ≡次高價密封式拍賣
因此付給賣方的價格是相同的

荷蘭式拍賣≡最高價密封式拍賣
因此付給賣方的價格是相同的

最高價密封式 ≠ 次高價密封式

最高價密封式 Vs 次高價密封式

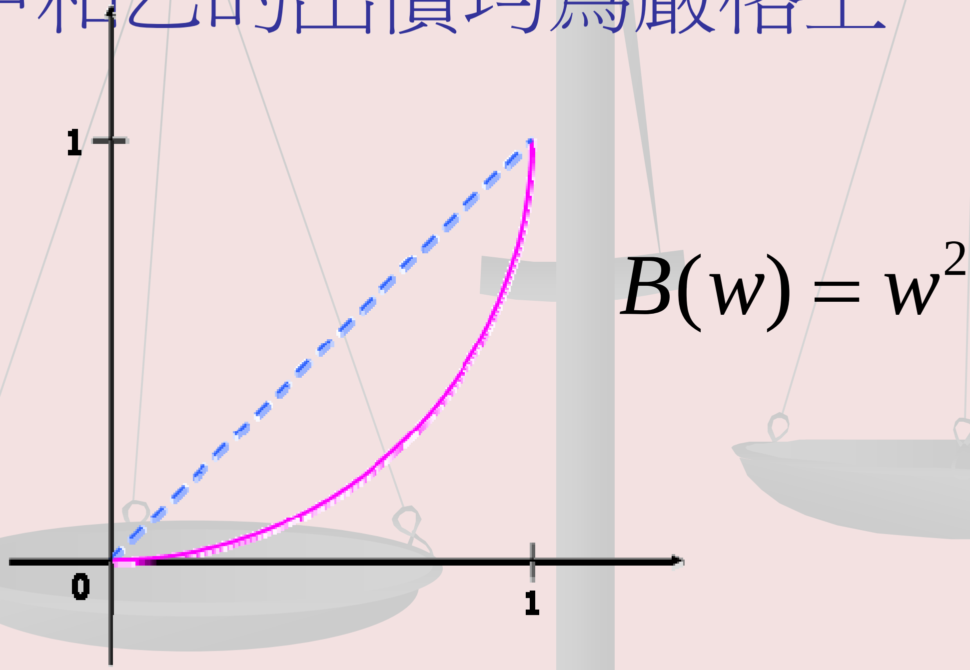
- 韋克瑞證明，如果每個人都不會因知道對手的估價而改變自己的估價，競投者的真正價值來自同一的概率分佈，無論是最高價密封式拍賣或是次高價密封式拍賣，付給賣方的價格是相同的。

- 因此，無論是以上那一種拍賣方式，付給賣方的價格是相同的。

- 韋克瑞證明，如果每個人都不會因知道對手的估價而改變自己的估價，競投者的真正價值來自同一的概率分佈，無論是最高價密封式拍賣或是次高價密封式拍賣，付給賣方的價格是相同的。
- 次高價密封式拍賣: 當我們知道將支付的價格肯定是小於我們的出價，我們會更積極地出價。
- 最高價密封式拍賣: 每個人都將出價低於自己的真正估值。
- 出價應低多少?

最高價密封式拍賣

- 假設僅有甲和乙兩個人出價競投。
- 甲和乙的真正估值爲 u 和 v ， u 和 v 是介於 0 和 1 之間的任何數，出現的機會率均等。
- 假設甲和乙使用相同的策略: 當甲和乙的真正估值爲 w 時，甲和乙的出價均爲嚴格上升函數$B(w)$。
- 例如 $B(w) = w^2$

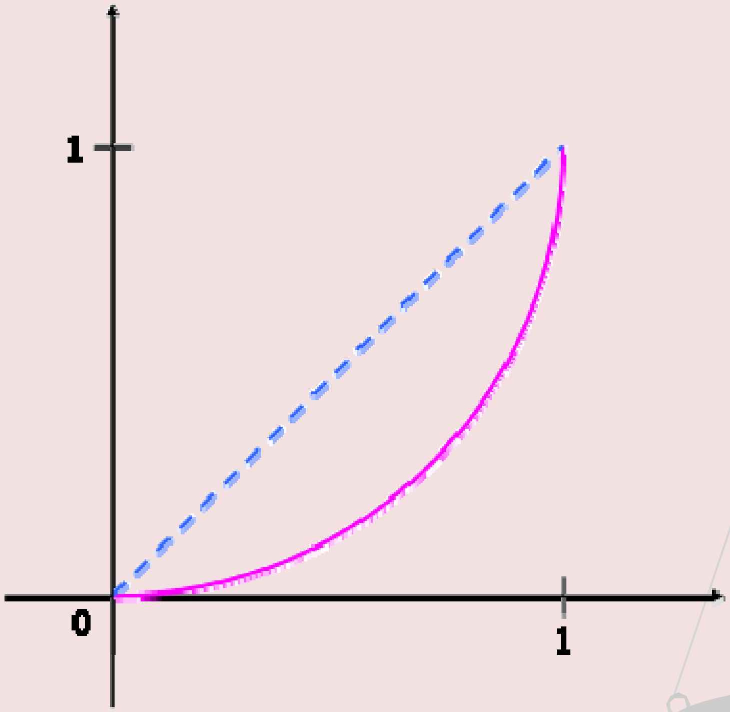


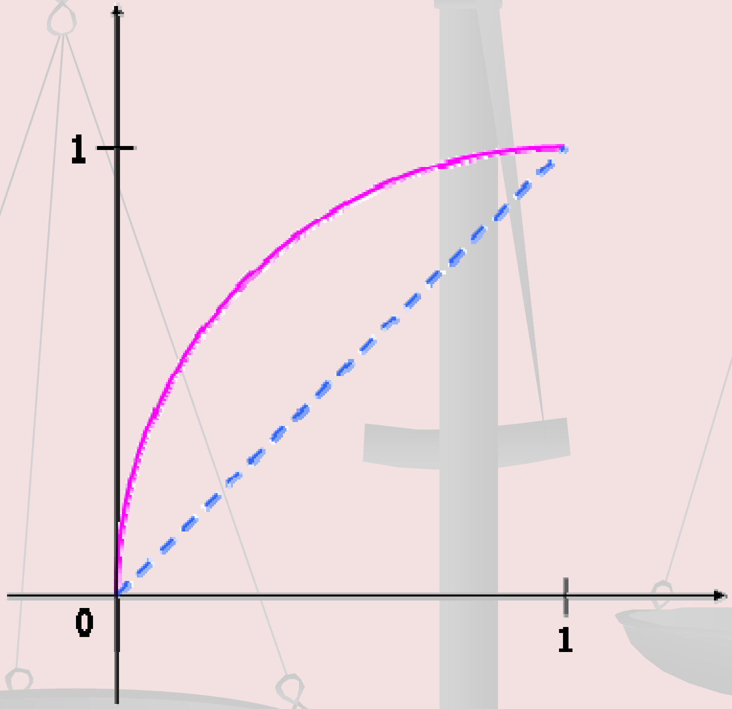
設C 爲 B 的逆函數 B^{-1}

$C(B(w)) = w$

$$B(w) = w^2$$

$$C(x) = B^{-1}(x) = \sqrt{x}$$



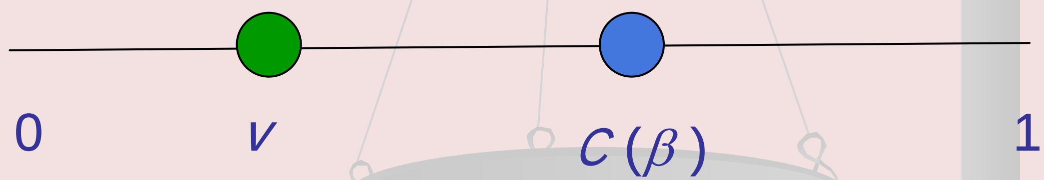


- 當甲和乙的真正估値爲 u 和 v ，而甲的出價爲 β 時，則甲的期望得益爲

$$(u-\beta)\ \mathrm{Prob}\ (\beta > B(v)) = (u-\beta)\ \mathrm{Prob}\ (C(\beta) > v)$$

- 因爲 v 在 0 和 1 之間出現的機會率均等，

$$\mathrm{Prob}\ (C(\beta) > v) = C(\beta)$$



- 甲的期望得益爲

$$(u-\beta)\,C(\beta)$$

- 用微積分尋找甲的最佳出價 β：

$$-C(\beta)+(u-\beta)\,C'(\beta)=0$$

當甲的真正估值爲u，則β=$B(u)$。

$$-C(B(u))+(u-B(u))\,C'(B(u))=0$$

$$-C(B(u))+(u-B(u))\,C'(B(u))=0$$

$$-u+(u-B(u))\,C'(B(u))=0$$

$$(u-B(u))\,C'(B(u))=u$$

$$C(B(u))=u$$

$$\Rightarrow C'(B(u))\,B'(u)=1$$

$$(u-B(u))\,C'(B(u))\,B'(u)=u\,B'(u)$$

$$u-B(u)=u\,B'(u)$$

$$u=u\,B'(u)+B(u)=[u\,B(u)]'$$

$$u = [u\,B(u\,)]'$$

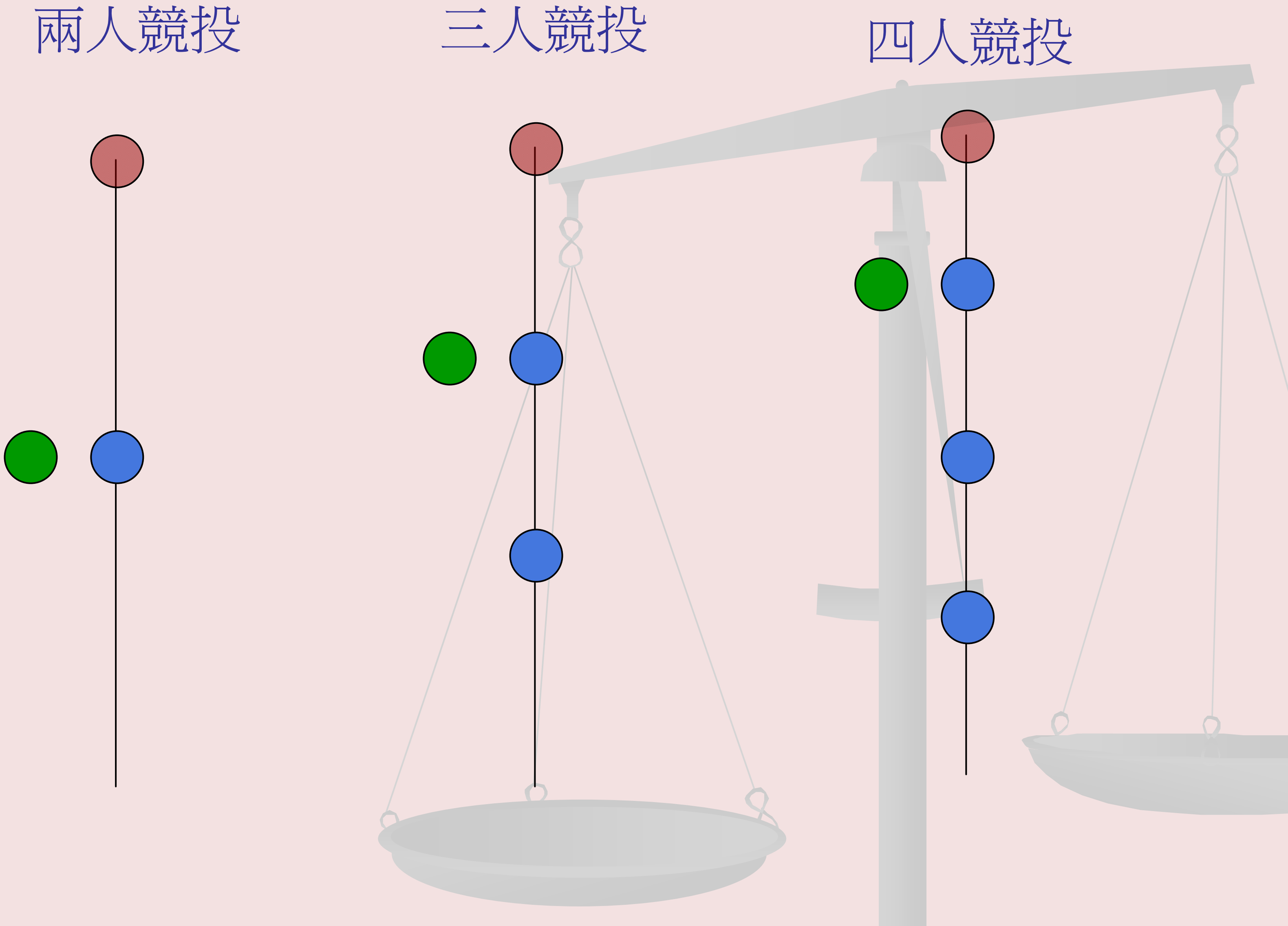
$$uB(u) = \int_0^u u\,du = \frac{1}{2}u^2$$

因此

$$B(u) = \frac{1}{2}u$$

甲和乙的最佳出價是真正估值的一半

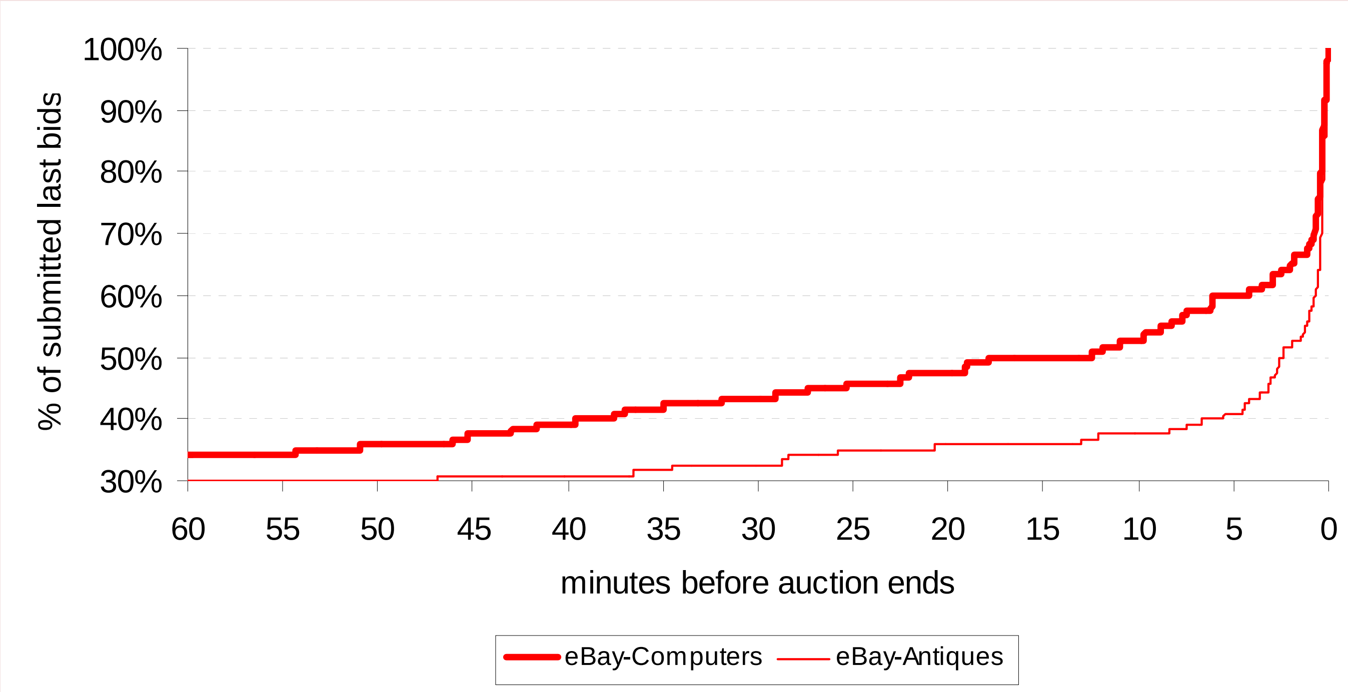
最高價密封式拍賣的策略:
先假設自己會贏，然後出價等於次高價的期望值



Reference

- Ken Binmore, *Playing for real : a text on game theory*, Oxford University Press, 2007.
- Paul Milgrom, Auctions and Bidding: A Primer, *Journal of Economic Perspectives*, vol.3, 3-22,1989.

拍賣狙擊 (Sniping)



share of bids in eBay	
last hour	68 %
10 minutes	55 %
5 minutes	50%
1 minute	37 %
10 seconds	12 %

Cumulative distributions of auctions' last bids on eBay

"... bidding high at the last minute and letting chance determine the outcome is better for both players than bidding high early and precipitating a bidding war."

Hal Varian

Slide courtesy of Yan Chen, University of Michigan.

Amazon’s soft close

“We know that bidding may get hot and heavy near the end of many auctions. Our Going, Going, Gone feature ensures that you always have an opportunity to challenge last-second bids. Here's how it works:

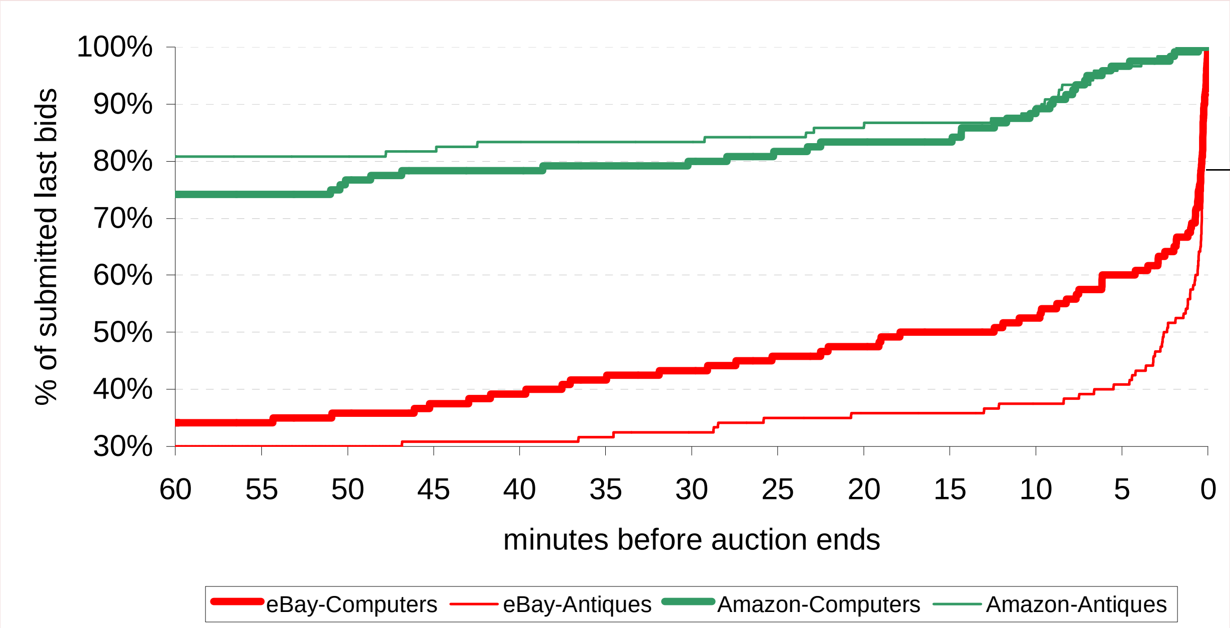
whenever a bid is cast in the last 10 minutes of an auction, the auction is automatically extended for an additional 10 minutes from the time of the latest bid.

This ensures that an auction can't close until 10 ‘bidless’ minutes have passed.“

[Amazon.com, 2002]

Slide courtesy of Yan Chen, University of Michigan.

eBay Vs Amazon



share of bids in ...

	eBay	Amazon
last hour	68 %	23 %
10 minutes	55 %	11 %
5 minutes	50%	3 %
1 minute	37 %	0.4 %
10 seconds	12 %	0 %

More experienced bidders on eBay bid later, while experience in Amazon has the opposite effect.

Slide courtesy of Yan Chen, University of Michigan.

拍賣設計

- 政府可以設計拍賣機制來實現一些特定的目標，例如大幅提高拍賣收入。
- 英國的3G移動電話牌照拍賣在2000年4月27結束。它爲英國政府賺得了220億英鎊（340億美元或英國國民生產總值的 2.5 ％)。

在2001年，港府拍賣四個3G頻譜的挑選次序和爲期十五年的3G網絡使用費。前者爲港府進賬 4 0 8 . 6萬元。 後者將爲香港政府在未來的十五年 ， 每年帶來至少2億港元的收入。

理性 Vs 非理性

最後通牒博弈你會怎麼分配那一百元?

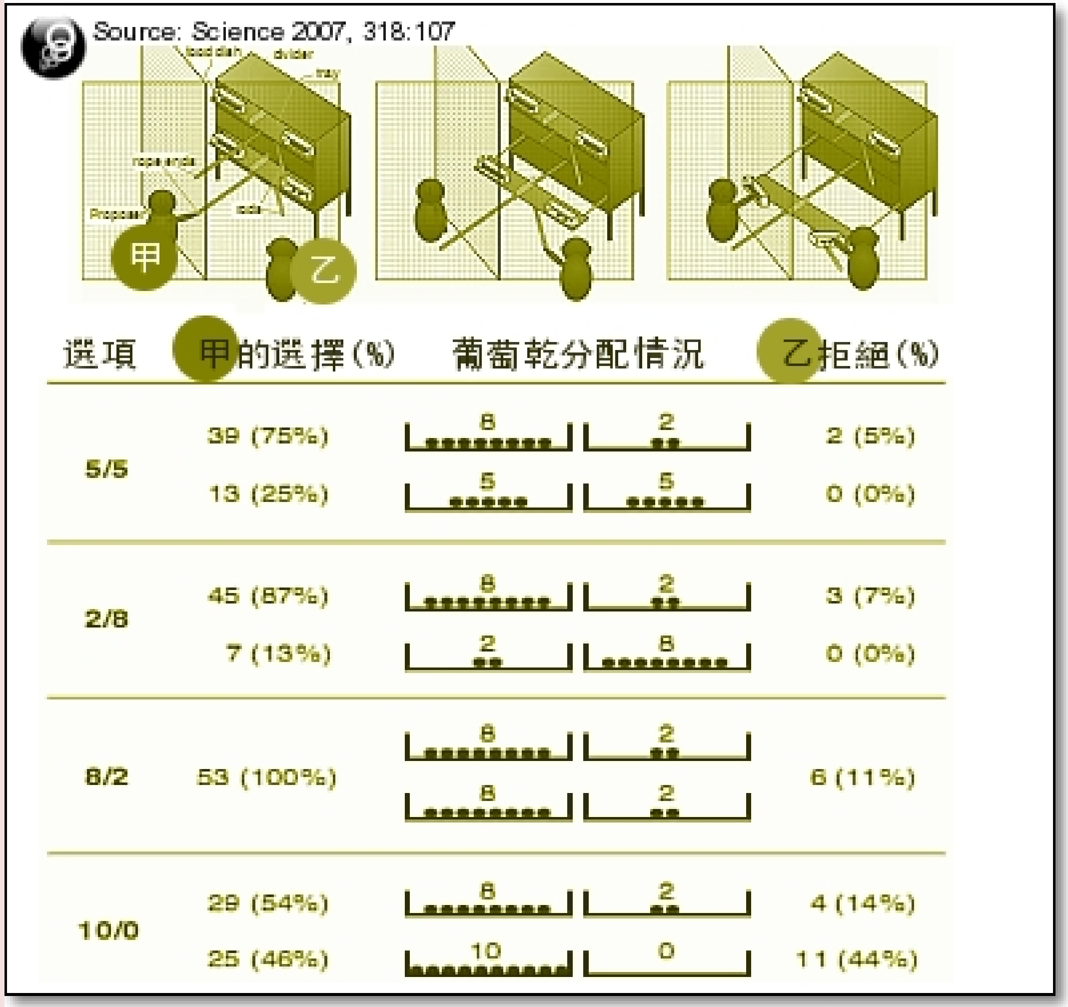
大部分的回應者會選擇拒絕 20% 以下剩下的金額，當做是對分配者分配不公平的逞罰。這理性嗎?

黑猩猩會怎麼分配那一百元?

Chimpanzees Are Rational Maximizers in an Ultimatum Game
Keith Jensen,* Josep Call, Michael Tomasello, *Science* 5 October 2007: Vol. 318. no. 5847, pp. 107 - 109

http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/318/5847/107

黑猩猩比人理性?



選項	甲的選擇(%)	葡萄乾分配情況	乙拒絕(%)
5/5	39 (75%)	8 / 2	2 (5%)
	13 (25%)	5 / 5	0 (0%)
2/8	45 (87%)	8 / 2	3 (7%)
	7 (13%)	2 / 8	0 (0%)
8/2	53 (100%)	8 / 2	6 (11%)
		8 / 2	
10/0	29 (54%)	8 / 2	4 (14%)
	25 (46%)	10 / 0	11 (44%)

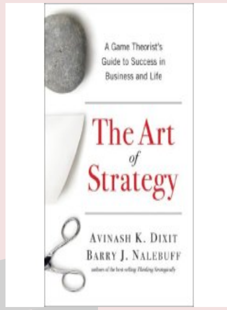
http://scipao.blogspot.com/2007/10/chimpanzees-in-ultimatum-game.html

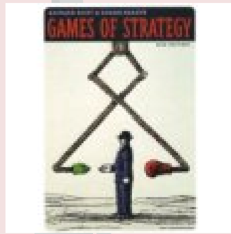
http://www.sciencemag.org/content/vol318/issue5847/images/data/107/DC1/1145850s1.mov

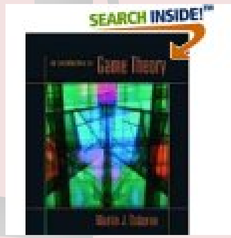
http://www.sciencemag.org/content/vol318/issue5847/images/data/107/DC1/1145850s2.mov

Game Theory Books

- The Art of Strategy: A Game Theorist's Guide to Success in Business and Life by Avinash K. Dixit and Barry J. Nalebuff ,2008.
- Games of Strategy, Avinash K. Dixit and Susan Skeath, 2004.
- An introduction to game theory, Martin J. Osborne, 2003. (http://www.economics.utoronto.ca/osborne/igt/index.html)







多 謝 ！

http://hkumath.hku.hk/~ntw/pub_lec.html