博弈高手

淺論約翰．納殊的諾貝爾獎得獎理論

吳端偉

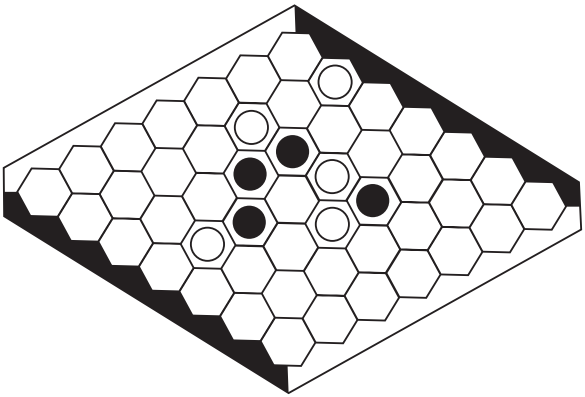
香港大學理學院
香港大學數學系

博弈高手

淺論約翰·納殊的諾貝爾獎得獎理論

吳端偉

香港大學數學系



香港大學數學系
香港薄扶林道

本書由大學教育資助委員會資助出版

本書頁 5、頁 28 的照片由黃嘉文小姐提供，
頁 5 的照片由香港大學發展及校友事務部提供，僅此致謝

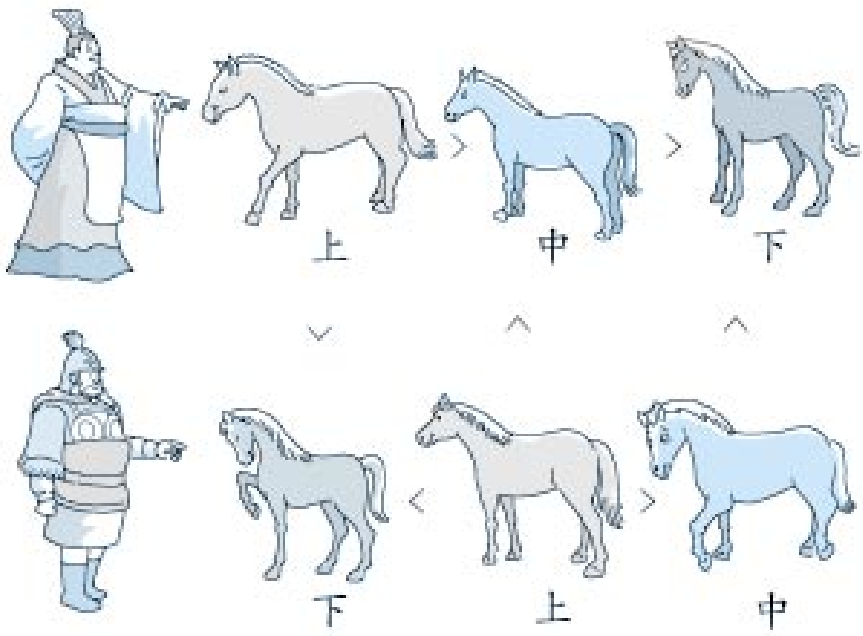
二OO四年初版

ISBN 962-86463-3-8

2001 年奧斯卡金像獎最佳電影《有你終生美麗》(又譯《美麗心靈》) (A Beautiful Mind) 的主人翁約翰・納殊 (John Nash)，是 1994 年諾貝爾經濟學獎得主。他在 2003 年初到香港大學演講，並掀起香港的一股納殊旋風。納殊以研究博弈論 (game theory) 揚名，究竟甚麼是博弈論呢？這個理論是由數學家約翰・馮・諾伊曼 (John von Neumann)於 1928 年所創立的。簡單而言，博弈論是研究每一個決策者應如何根據其他對手的選擇，去作出最有利自己的策略。以下是中國古代一個巧用策略的故事，它能幫助我們了解博弈論所要探討的問題。

話說齊威王經常要大將軍田忌與他賽馬，賽馬的規則是這樣的：每次雙方各出三匹馬，一對一比賽三場，每一場的負方輸給勝方一千斤銅。齊威王的三匹馬和田忌的三匹馬按實力都可以分為上、中、下三等，但齊威王的上、中、下三匹馬分別比田忌的上、中、下三匹馬略勝一籌。起初總是同等次的馬進行比賽，因此田忌每次都是連輸三場，連輸三千斤銅。實際上，田忌的上馬雖然不如齊威王的上馬，卻比齊威王的中馬和下馬都要好，而田忌的中馬比齊威王的下馬要好一些，因此田忌每次都連輸三場是有些冤枉的。

後來田忌的謀士孫臏想出了一個辦法，使田忌反敗為勝。孫臏叫田忌不要用自己的上馬去對抗齊威王的上馬，而要用下馬去對抗齊威王的上馬，上馬則去對抗齊威王的中馬，中馬對抗齊威王的下



馬。這樣，雖然第一場田忌必輸無疑，但後兩場卻都能獲勝，二勝一負，田忌反而能贏齊威王一千斤銅。

這個著名的故事生動地告訴我們，巧用策略是多麼重要。事實上，一旦齊威王發覺田忌在使用計謀，明白了自己為什麼輸給對方時，他必然也會改變自己三匹馬的出場次序，以免再落入田忌的圈套。這樣齊威王和田忌之間的賽馬，便變成一個雙方應如何選擇策略的問題，這正是博弈論所要處理的課題。

今日博弈論已被廣泛應用於招標、國際貿易、選舉、公共政策等等的經濟及社會科學問題上。它甚至被應用到演化生物學 (evolutionary biology) 上來解釋生物演化的現象，例如為何很多物種的雌雄比例總是約一比一的。

在本書裏我們將深入淺出，輔以大量生動的例子，來介紹博弈論以及納殊的諾貝爾獎得獎理論。

納殊的生平

首先讓我先介紹一下納殊的生平。納殊在 1928 年 6 月 13 日出生於美國西維吉尼亞洲的藍田鎮 (Bluefield, W. Virginia)。他的父親是一位電機工程師，母親則是一位教師。納殊於 1945 年考進卡內基技術學院 (Carnegie Institute of Technology) 化學工程系，但很快就轉讀數學系，並且只用了三年時間便取得了學士及碩士學位。在此期間，納殊選修了一科他唯一修讀過的經濟科。他寫了一篇關於協商問題 (bargaining problem) 的重要論文作為此科的功課。

在取得碩士學位後，納殊進入普林斯頓大學 (Princeton University) 攻讀博士。原校老師為他所寫的推薦信只有一行：「此人是天才!」(This man is a genius)。

在攻讀博士期間，納殊發明了一種名為 Hex 的遊戲，並證明了執先者有必勝的策略（見附錄一，頁 31）。他在短短十四個月左右便寫出了那篇使他獲得 1994 年諾貝爾經濟學獎的博士論文 ——《非合作性博弈》(Non-Cooperative Games)，全文只有二十七頁！而博弈論裏的一個極為重要的概念 —— 混合納殊均衡 (mixed Nash

equilibrium)，就是在此論文中首次提出的。納殊還證明了對一般的非合作性博弈，混合納殊均衡一定存在，為今日非合作性博弈論之發展奠定了最重要的數學基礎。在納殊二十二歲生日那天，他獲得了博士學位。令人驚訝的是，納殊在撰寫博弈論論文的同時，亦在研究一個關於實代數簇 (real algebraic varieties) 的純數學問題。他對這個問題的解答，以及他對偏微分方程 (partial differential equations) 和黎曼幾何 (Riemann geometry) 的研究工作，使他在 1999 年獲得一個純數學的大獎 —— 斯蒂爾獎 (Steele Prize)。

納殊拿到博士學位後，旋即受聘於麻省理工學院 (MIT)。在教授高等微積分時，納殊認識了一位名叫阿莉西亞・拉德 (Alicia Larde) 的物理系學生。他們於 1957 年結婚，翌年兒子馬田出生，這是納殊生活最愉快的日子。可惜好景不常，在 1959 年，三十一 歲的納殊患上了精神分裂症，隨後多次進出精神病院。患病以後，他行為怪異，無法與人溝通，並不時寫些莫名其妙的信給公眾人物。1963 年納殊辭去教職並和太太拉德離婚。為了能讓納殊安心養病，拉德便搬家回到普林斯頓，她讓那離了婚的丈夫住在家裏，自己當電腦操作員，賺錢養他和兒子。透過拉德的悉心照顧、普林斯頓大學師友的關懷，和納殊自己的努力，二十多年後，他竟然能奇蹟般康復過來，並又開始從事博弈論的研究。

在納殊患病的二三十年間，博弈論有了快速的發展和廣泛的應用。並成為了經濟學裏一個重要的分枝。而正是納殊的基礎性貢獻，使博弈論有可能蓬勃發展。因此在 1994 年，瑞典皇家科學院諾貝爾獎委員會把經濟學獎頒予納殊和另外兩位博弈論學者約翰・夏仙義 (John C. Harsanyi) 和雷恩哈德・塞爾頓 (Reinhard Selten)。

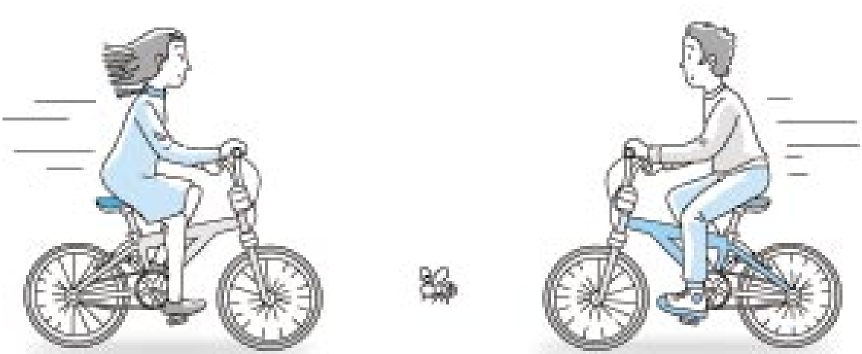
巧合的是，該年剛好為博弈論始創人馮・諾伊曼和奥斯卡・摩根斯坦 (Oskar Morgenstern) 合作的巨著 —— 《博弈論和經濟行為》(The Theory of Games and Economic Behavior) 出版五十周年。

馮・諾伊曼

博弈論是由 1903 年出生的美籍匈牙利數學家馮・諾伊曼於 1928 年所創立的。馮・諾伊曼被譽為最後一位數學全才，他不單在多個數學和理論物理的分枝做了很多基礎性的工作，還參加了原子彈的創造和設計，並建造了第一部電腦。不難想像他擁有驚人的記憶力和思考速度，以下的這個故事很能説明這一點。

話説有人問馮・諾伊曼以下的問題。假設甲、乙兩人相距二十哩，並以時速十哩騎著單車向著對方前進。一隻蜜蜂從甲單車的前輪飛向乙單車的前輪，再折返甲單車的前輪，如是者來來回回直至兩部單車相遇，如果蜜蜂的速度是每小時十五哩，牠來來回回總共飛了多少哩呢？

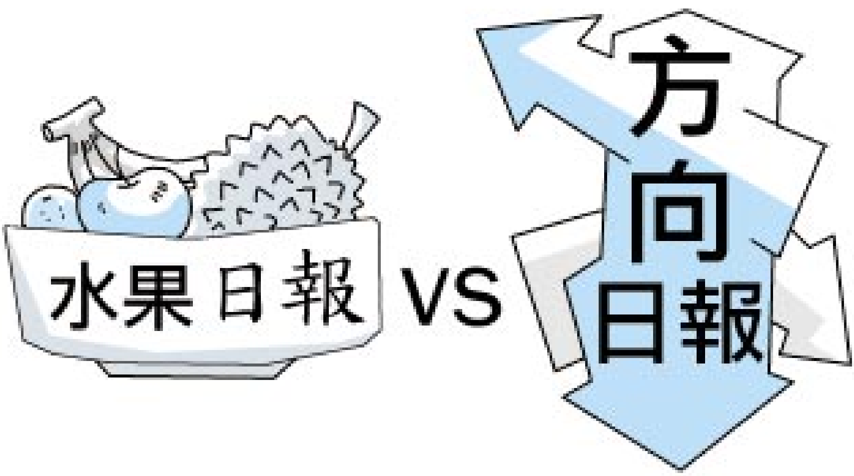
這個問題有兩種解法，方法一是找出蜜蜂每一次來回的路程，然後把它們加起來。這個方法直接但費時。方法二是留意到兩車將於一小時後相遇，所以蜜蜂便飛了十五哩。馮・諾伊曼毫不費勁便立刻給出正確的答案，這使問者以為他一早便知道第二個方法，然而他只是在腦中快速地把所有距離加起來！



博弈論與經濟學

當馮・諾伊曼在 1928 年創立博弈論時，它只是純數學裏的一個分枝。博弈論為人所知並被廣泛應用到經濟學上，始於 1944 年《博弈論和經濟行為》的出版。這本由馮・諾伊曼和普林斯頓大學經濟學家摩根斯坦所寫的博弈論巨著，首次嘗試運用博弈論去分析經濟問題。博弈論嘗試為決策者之間的衝突與合作建立數學模型，它研究每一個決策者如何根據其他對手的策略，去作出最有利於自己的策略。由於經濟活動往往涉及策略的運用，博弈論因而大派用場。

設想某地的兩份報紙，《水果日報》和《方向日報》正在考慮進行一場減價戰。我們可以嘗試運用博弈論去為它們作分析。為了簡化所考慮問題的複雜性，我們將假設《水果日報》和《方向日報》只可選擇減價一元或不減價這兩種策略。如果兩報都不減價，則各可在該年賺取二千萬元（此處用的數字純屬虛構）。若己方減價而對



手不減價，己方可賺取三千萬元而對手只能賺到五百萬元。若兩報同時減價，則各可賺取一千萬元。明顯地，雙方的最終得失取決於自己和對手所選的策略。表一總結了兩報面對的情況，表內的數字單位為千萬元。每個格子中左邊的數字是《水果日報》的利潤，右邊是《方向日報》的利潤。

		方向日報	
		減價	不減價
水果日報	減價	1,1	3,0.5
	不減價	0.5,3	2,2

表一

在進一步分析這個例子前，讓我們先看看博弈論裏另一個著名的例子 —— 疑犯困境 (Prisoner's Dilemma)。它是納殊的論文導師艾伯特・塔克 (Albert Tucker) 所構造的。

疑犯困境

話說約翰和彼得被警方以藏械罪名拘捕。警方懷疑他們曾分別參與多宗嚴重罪案。兩人被單獨囚禁和盤問。警方分別向兩人提出以下的條件，如果二人都承認曾參與那些罪案，每人將被判入獄三年。若他們都不認罪，則各判入獄一年。如果一人否認而另一人認罪，並且願意轉作污點證人指證對方，那不認罪者將被判入獄五年，而認罪者則可獲釋放。這樣，兩個疑犯面對的情況如下（見表二），每個格子中左邊的數字是約翰的刑期，右邊是彼得的刑期。

		彼得	
		認罪	**不認罪**
約翰	**認罪**	3,3	0,5
	不認罪	5,0	1,1

表二

細心的讀者或會留意到，上面兩個例子雖然表面上很不同，但它們卻有著不少共同點。首先，兩例中都有兩個參與者，我們不妨叫它們做 A 和 B 。例如 A 是《水果日報》，B 是《方向日報》；或 A 是約翰，B 是彼得。另外，每個參與者都有兩個策略 C 和 D 。例如 C 是減價而 D 是不減價；或 C 是認罪而 D 是不認罪。總共可以有四種情況出現：(C,C), (C,D), (D,C) 和 (D,D)。這裏 (C,D) 表示 A 選 C 而 B 選 D，(C,D) 稱為一個策略組合 (strategy portfolio) 。

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">方向日報 (B)</td></tr>
<tr><td>減價
(C)</td><td>不減價
(D)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">水果日報
(A)</td><td>減價
(C)</td><td>1, 1</td><td>3, 0.5</td></tr>
<tr><td>不減價
(D)</td><td>0.5, 3</td><td>2, 2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">彼得 (B)</td></tr>
<tr><td>認罪
(C)</td><td>不認罪
(D)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">約翰(A)</td><td>認罪
(C)</td><td>3, 3</td><td>0, 5</td></tr>
<tr><td>不認罪
(D)</td><td>5, 0</td><td>1, 1</td></tr>
</table>

A 和 B 都清楚知道 (C,C), (C,D), (D,C) 和 (D,D) 中每一個策略組合帶來的得失。如果我們把表一和表二放在一起，我們將清楚看到，在兩個例子中參與者 A 和 B 根據各策略組合帶來的得失，能得到以下策略組合的優先次序 (preference)。

參與者 A：(C,D) > (D,D) > (C,C) > (D,C)

參與者 B：(D,C) > (D,D) > (C,C) > (C,D)

例如從表一，我們知道對《水果日報》（參與者 A），策略組合

(C,D) = （減價，不減價）可為它帶來三千萬元收入，這當然比策略組合 (D,D) =（不減價，不減價）好，因為它只能為《水果日報》帶來二千萬元收入。同樣道理，從表二得知對約翰（參與者 A）而言，策略組合 (C,D) =（認罪，不認罪）要比策略組合 (D,D) =（不認罪，不認罪）好。讀者不妨自己驗證一下，對 A 和 B 來説，各策略組合的確有上述的優先次序。

如果我們能根據以上資料，分析出 A 和 B 的最終選擇，便可把結果應用在以上兩例。而我們將會看到 A 和 B 都會選 C ，雖然他們都知道 (D,D) > (C,C)。

何謂博弈？

前面兩個表面上不同，但本質一樣的例子，是博弈論裏博弈(game)的例子。而每一個博弈，是由以下四個元素來界定的：

1. 參與者的數目;

2. 參與者各自可選擇的全部策略;

3. 所有可能出現的策略組合;

4. 各參與者在每個策略組合的得失。

從第四項元素，我們可以得到各參與者對策略組合的優先次序。博弈論的一個主要目的，是希望能從各參與者對策略組合的優先次序，推斷出參與者的最終決定。從這個角度看，報章減價戰和疑犯困境可視為同一類博弈，因為在這兩個例子中，對於每個參與者，各策略組合的優先次序是一樣的。

現在讓我們再看看其他博弈的例子。假設一對情侶 Ross 與 Rachel 計劃共渡週末。Ross 想看足球比賽而 Rachel 則喜歡看電

		Rachel (B)	
		足球 (C)	電影 (D)
Ross (A)	足球 (C)	2,1	0,0
	電影 (D)	0,0	1,2

表三

影。由於他們在熱戀中，雙方都不願意分開活動。跟前兩例一樣，我們可以用表三來描述這個博弈。

在此例中，我們需要給出表中各策略組合的得失。例如，對 Ross 來說策略組合（足球，足球） 帶來的滿足感最大，因為 Rachel 願意陪他一起看他喜歡的球賽。所以我們不妨假設 Ross 得到的滿足度為 2，而 Rachel 因為能夠跟 Ross 一起，所以即使未能看電影，她還是頗滿意的，因此不妨設她的滿足度為 1。同理，如果 Ross 跟 Rachel 一起看電影，可設 Ross 的滿足度為 1 而 Rachel 的滿足度為 2 。如果 Ross 去看球賽而 Rachel 去看電影，則雙方的滿意程度都為 0，因為他們不想分開活動。邏輯上可能但實際上應該不會有 Ross 去看電影而 Rachel 去看球賽的情況出現，不過我們還是假設他倆的滿足度都為 0。由以上資料，我們得到 Ross 與 Rachel 對各策略組合的優先次序。

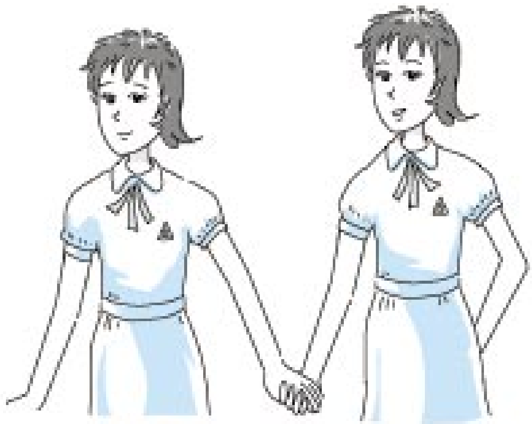
Ross：

（足球，足球）>（電影，電影）>（足球，電影）=（電影，足球）

Rachel：

（電影，電影）>（足球，足球）>（足球，電影）=（電影，足球）

請注意，縱使我們把 Ross 與 Rachel 對策略組合的滿意度乘以 2，也不會改變上述策略組合的優先次序。因此也不會改變博弈論根據它們所能作出的推斷。所以只要不改變策略組合的優先次序，我們放什麼數值在表三內是不太重要的。



類似 Ross 和 Rachel 遇到的情況不時發生，例如一對孿生姊妹阿 Sa 和阿嬌打算一起學一門外語，阿 Sa 想選修德文，而阿嬌則想學法文，但她們又不想分開上課。我們可以如上例一樣，在表四給出她們對各策略組合的滿意度。

讀者不妨根據表四內所定的滿意度，列出阿 Sa 和阿嬌對各策略組合的優先次序。這樣讀者將發覺 Ross 和 Rachel 跟阿 Sa 和阿嬌這兩個例子，在結構上是很相似的。事實上，如果我們用 A 代表 Ross 或阿 Sa，B 代表 Rachel 或阿嬌；以策略 C 代表足球或德文，D 代表電影或法文，則讀者會發現 A 和 B 對各策略組合的優先次序是：

		阿嬌 (B)	
		德文 (C)	法文 (D)
阿 Sa (A)	德文 (C)	3,2	1,1
	法文 (D)	1,1	2,3

表 四

參與者 A：(C,C) > (D,D) > (C,D) = (D,C)

參與者 B：(D,D) > (C,C) > (C,D) = (D,C)

因此以上兩個博弈的本質是一樣的，人們一般把這類博弈叫做約會博弈 (dating game)。另一方面，由於疑犯困境與約會博弈有著十分不同的策略組合優先次序，它們並不是同一類博弈。

博弈的解

透過前面的四個例子，讀者應該對何謂博弈有所了解。對於每一個博弈，我們都希望知道每個參與者將如何決策，而所有參與者通過理性分析後，所能作出最明智的決策便構成博弈的解 (solution)。請注意，當某參與者在通過理性分析後，得到多於一個同等優劣的策略時，他或者會隨意採用其中一個策略，這時博弈就有多於一個解。問題是在眾多的策略組合中，那些才是博弈的解呢？讓我們現在試試找出疑犯困境這個博弈的解。首先我們不妨假設約翰將認罪，這樣彼得應如何決策呢？在此假設下，如果彼得選擇不認罪，則將要入獄五年；相反若彼得選擇認罪，他只須入獄三年。因此彼得應該認罪。現在如果我們假設約翰將不認罪，不難看出彼得在此假設下的最佳策略也是認罪。所以無論約翰認罪與否，彼得的最佳策略都是認罪。因此認罪是一個上策 (dominant strategy)，其定義如下。

定義：一個策略稱為某參與者的上策，如果無論其他對手怎樣選擇，這個策略給該參與者帶來的得益，都比任何其他策略為高。

		彼得	
		認罪	**不認罪**
約翰	**認罪**	3,3	0,5
	不認罪	5,0	1,1

若將同樣的分析應用於約翰身上，我們便知道認罪也是約翰的上策。若彼得和約翰都是理性的，則他們都會選擇認罪，並將被判入獄三年。吊詭的是，如果雙方事前能達成協議，一起選擇不認罪，他們的刑期只會是一年。問題是就算雙方有協議在先，也很難保證對方不會出賣自己。這種參加者無法達成有約束力協議的博弈，我們稱它為非合作性博弈 (non-cooperative game)。

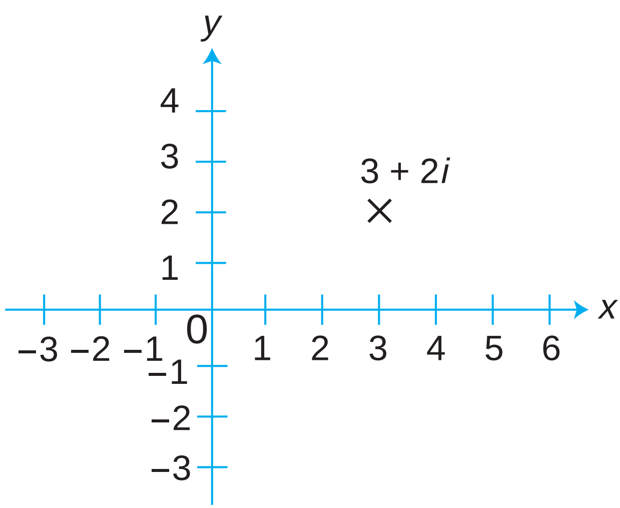
由於報章減價戰和疑犯困境這兩個博弈本質上一樣，我們可以將以上分析的結果應用於報章減價戰，得到兩張報紙都會減價的結論。所以（減價，減價）便是報章減價戰這個博弈的解。

以上兩例，讓我們知道在什麼情況下，可以找到博弈的解。如果每個參與者都有一個上策，則他們都會明智地選擇自己的上策，這便是博弈的解。

如果每個參與者都有上策並選擇其上策，這個策略組合便稱為上策均衡 (dominant strategy equilibrium)。請注意，當處於上策均衡時，每個參與者都不會改變其策略。如果一個博弈存在上策均衡，那麼每個參與者將依從這個均衡去作出選擇，我們因此可以推斷出他們的行為。可惜的是，對於大部分博弈，上策均衡並不存在。讀者只要嘗試考察一下 Ross 跟 Rachel 的例子，就知道 Ross 和 Rachel 都沒有上策，因此這個博弈沒有上策均衡。而我們亦不能據此推斷出 Ross 和 Rachel 的最終選擇，也就是說這個博弈並沒有明確的結局。

對於沒有上策均衡的博弈，我們應該怎辦呢？應該怎樣去發展我們的理論呢？著名數學家喬治．波利亞 (George Polya) 曾說過，當你不能解決一個問題時，不妨先想想一些跟它類似，而你又知道怎樣解答的問題，從而希望能得出一些靈感。

所以讓我們先看看以下數學裏的一個問題。考慮多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$，如果 a 是一個實數 (real number) 使得 $p(a) = 0$，則稱實數 a 為多項式 $p(x)$ 的一個根 (root)。有些多項式沒有實數根，例如 $x^2 + 4$，因為對所有實數 x, $x^2 + 4 > 0$。對於沒有實數根的多項式，我們應該怎辦呢？它們有沒有其他根呢？解決這個問題的方法，是引進一種比實數一般的數。這種數叫做複數 (complex number)，它是形如 $a + bi$ 的數，這裏 a 和 b 都是實數，而 $i = \sqrt{-1}$，即 $i^2 = -1$。正如每一個實數可以想像成 x– 軸上的一點，我們可以把複數 $a + bi$ 想像成平面上坐標為 (a, b) 的一點，如下圖。



引入複數後，原本沒有根的多項式 $x^2 + 4$ 現在有了複數根 $a = 2i$ ($= 2\sqrt{-1}$)，因為 $a^2 + 4 = (2i)^2 + 4 = 4i^2 + 4 = 4(-1) + 4 = 0$。事實上不單 $x^2 + 4$ 有了根，大數學家費里德里希・高斯 (Friedrich Gauss) 證明了代數基本定理 (Fundamental theorem of algebra)：

每一個非常數多項式都最少有一個複數根。

這是數學裏一個非常重要的定理。它亦顯示出考慮複數根的好處。由此我們得到以下的啟發：

嘗試為每一個博弈，引入一種比上策均衡更一般的解，並證明每個博弈最少有一個這樣的解。

這亦是納殊如何在馮・諾伊曼所奠定的基礎上，進一步發展博弈論的進路。在納殊的博士論文裏，他引入了現在稱為混合納殊均衡的概念，它是一種比上策均衡更一般的解。接著納殊還證明，在大多數情況下，混合納殊均衡必定存在。

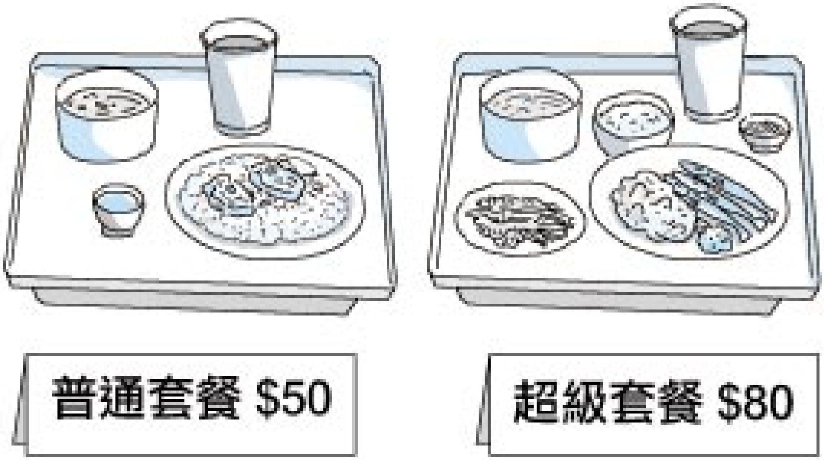
要了解何謂混合納殊均衡我們得先知道什麼是納殊均衡 (Nash equilibrium)。在給出納殊均衡的定義前，我將嘗試說明引進這個重要概念背後的想法。設想我們擁有一個有預測力的理論，它能準確地推算出一個博弈的結局，那麼這個結局應該有什麼特性呢？假設這個博弈有甲、乙、丙三個參與者，而我們的理論可以只根據甲、乙和丙對各策略組合的優先次序，便能推算出他們的策略：甲選擇 A，乙選擇 B 和丙選擇 C。現在試想像，如果甲事先知道乙和丙將會分別選擇 B 和 C ，那麼甲會否不再選 A 呢？答案是不會的，因為我們的理論只根據各策略組合的優先次序作出推斷，而甲事前知道乙和丙的選擇，並不會改變甲、乙、丙三人對各策略組合的優先次序，而如果我們的理論真的如上所說般有效，則甲是依然會選擇 A 的。同樣道理，乙和丙都不會獨自改變自己的策略。因此如果我們要建立一個有預測力的理論，則這個理論所推算出的結局，必須是一個納殊均衡，其定義如下。

定義：一個策略組合稱為納殊均衡，如果所有參與者都不會獨自改變他們已選擇的策略。

為了更好的了解納殊均衡的概念，我們看看以下的一些例子。

例一：悶堂不早退

在一個很沉悶的課堂上，學生可選擇早退或繼續留下聽課。為怕在老師心目中留下壞印象，所以沒有學生希望自己成為第一個早退的學生。因此所有人將選擇繼續留下，這正是一個納殊均衡。因為如果其他人依舊選擇繼續留下，則自己必定不會改選早退這個策略。



例二：平均分賬

十位同學一起吃晚飯，各人可以選擇五十元的普通套餐或八十元的超級套餐，最後大家以平均分賬的方法付款。每個人都選擇五十元餐並不是一個納殊均衡。當其中一人知道別人都選五十元的普通餐，則他大可改選八十元的套餐，因為他所要付的錢將遠低於八十元。另一方面，每一個人都選八十元的套餐是不是一個納殊均衡呢？

例三：上策均衡

現在讓我們看看為什麼納殊均衡是一個比上策均衡更加一般的概念。當處於上策均衡時，每一個參與者都選擇了他的上策，因此每人都不會再改變其策略。另一方面，當處於納殊均衡時，根據定義每一個參與者都不會獨自改變其策略，因此每個上策均衡必定是一個納殊均衡。在疑犯困境裏，（認罪，認罪）是一個上策均衡，所以（認罪，認罪）是一個納殊均衡。這個博弈還有其他的納殊均衡嗎？

我們知道在約會博弈裏，上策均衡不存在。但這個博弈卻有兩個納殊均衡，其一是（足球，足球），因為當 Ross 和 Rachel 知道對方不改選電影時，他們也不會獨自改選電影。你能找出另一個納殊均衡嗎？

例四：追求美女

電影《有你終生美麗》虛構了一幕情節用以說明納殊是如何想出納殊均衡這個概念的，可惜編劇並未準確掌握納殊均衡的概念。話說電影中納殊跟四位男同學在酒吧裏喝酒，酒吧的另一邊有一位金髮美女正與四位女孩子在聊天。如果五個男孩子都去追求那位金髮美女，那麼將只有一人成功。當其餘四位失敗而歸，轉而追求自己心目中的次選時，女生因知道自己不是在追求者心目中的首選，便會賭氣拒絕追求者；這四位男生因而沒法覓得女伴。在電影裏，納殊建議大家一開始就追求彼此心中的次選，這樣一來大家找到女伴的機會便大大提高。可是所有人皆選擇次選這個策略組合其實並不是納殊均衡，因為當有人確定其餘四人都不會追求那位金髮美女時，他就必定會轉去追求她。

混合納殊均衡

要了解何謂混合納殊均衡，就必須要知道什麼是混合策略 (mixed strategy)，我們可藉以下的遊戲去了解它。這遊戲有三位參與者及一位公證人。遊戲開始時，參與者需一同豎起手指，他們可選擇豎起一隻或兩隻手指。唯一豎起一隻手指的人將獲得公證人發給一元的獎金，而唯一豎起兩隻手指的則可獲得兩元獎金，除這兩情況外，參與者不會獲得獎金。你能找出這個遊戲的所有納殊均衡嗎？如果重複這個遊戲多次，那麼每人將需要決定豎起一隻或兩隻手指的百分比，好使自己可以多獲得獎金。這個百分比，如 30% 的時間豎一隻手指，70% 的時間豎兩隻，就是一個混合策略。特別地當參與者每次都選擇同一個策略時，則稱這類混合策略為純粹策略 (pure strategy)。對於混合策略，我們亦可考慮相應的納殊均衡，這就是混合納殊均衡，其詳細定義如下。

定義：一個混合策略組合稱為混合納殊均衡，如果所有參與者都不會獨自改變他們已選擇的混合策略。

可以計算出上述遊戲的一個混合納殊均衡是每人都選擇約 41% 時間豎起一隻手指，59% 時間豎起兩隻手指（見附錄二，頁 34）。

明白了什麼是混合納殊均衡，我們便可以了解納殊的諾貝爾得獎定理：

任何 n 個人的非合作性博弈都至少有一個混合納殊均衡。

要證明以上定理，納殊首先證明混合納殊均衡的存在等同於某個函數 f 有不動點 (fixed point) —— 如果 $f(c) = c$，則 c 是函數 f 的一個不動點。納殊接著運用拓樸學 (topology) 裏一個不動點定理 (Kakutani's fixed point theorem) 去保證函數 f 有不動點，從而證明混合納殊均衡必定存在。

請注意，只有當一個博弈能重複多次時，我們才能談它的混合納殊均衡，例如兩個人玩的石頭、剪刀、布猜勝遊戲。這是非合作性博弈，因此根據納殊的定理，混合納殊均衡一定存在。相反當這個遊戲只玩一次時，則它沒有納殊均衡。你能證明這點嗎？

最後我們説明一下，為什麼在某種意義下，混合納殊均衡是上策均衡的推廣。首先我們知道上策均衡必定是一個納殊均衡。另一方面如果一個博弈能重複多次，則它的納殊均衡可以被看成是一個混合納殊均衡。事實上，如果每一個參與者每次都選用其在納殊均衡中的策略，則這些純粹策略所組成的策略組合，將會是一個混合納殊均衡。這不難從納殊均衡的定義推導出來。

最後讓我們談談納殊理論的一些應用。首先看看它在博弈論本身的應用。

應用一：博弈論

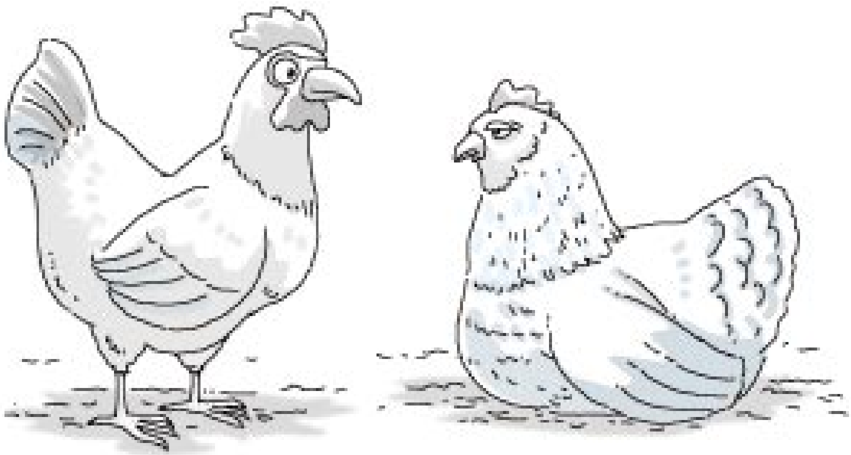
我們可以根據博弈的不同性質，把博弈分成以下幾個大類；

1. 非合作性與合作性 (non-cooperative vs cooperative)；
2. 靜態與動態 (static vs dynamic)；
3. 全信息與不完全信息 (complete information vs incomplete information)。

所謂非合作性博弈是指參與者在決策或行動時無法達成有約束力的協議。反之則稱為合作性博弈。疑犯困境便是一個非合作性博弈。同時決策或行動的，叫做靜態博弈，決策或行動有先後次序的叫做動態博弈。例如石頭、剪刀、布猜勝遊戲便是一種靜態博弈。而下象棋則是一種動態博弈。此外，讀者或會留意到，前面所介紹過的博弈，其實都被假定為靜態博弈。完全信息博弈指參與者對所有參與者在各種情況下的得失有完全的了解，否則便是不完全信息博弈。所有我們談過的博弈都是完全信息的。事實上，前面提過的例子都是非合作性靜態完全信息博弈，對於這類博弈，混合納殊均衡是一個恰當的解的概念。對於其他類型的博弈，我們一樣須要引入相應的解。而所有這些解都是從納殊均衡這概念演變出來的。

應用二：演化生物學

在 1973 年，梅納德．史密斯 (Maynard Smith) 在研究演化生物學的問題時，引進了一個新概念 —— 演化穩定策略 (evolutionary



stable strategy)，這個概念是在混合納殊均衡的基礎上，加入一個穩定性的條件定義的。運用這個新概念，生物學家研究了不同物種的特性和行為上的演化，以及環境因素對生物演化的影響。例如他們能根據演化穩定策略來解釋為何大多數兩性生物的性比率都非常接近一比一。

應用三:拍賣

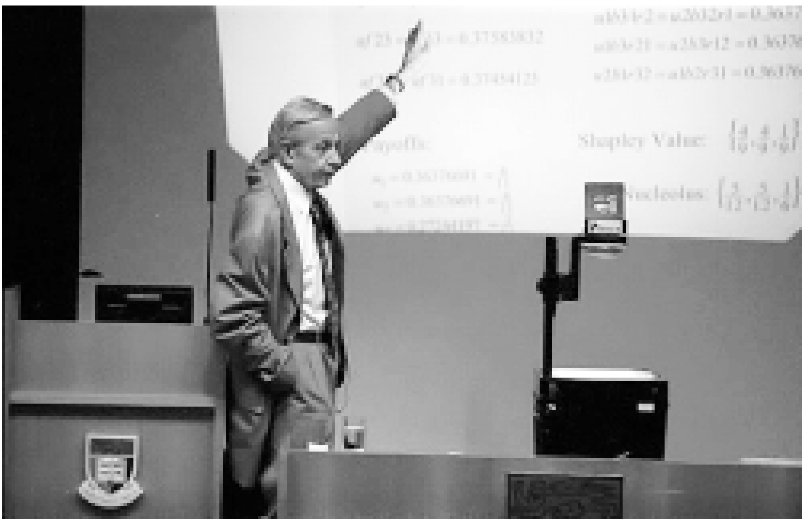
從古羅馬時代販賣奴隸開始，到英國政府出售 3G 電話頻道，都以拍賣成交。拍賣的方式林林總總，依出價方式可分為英國式 (English auction)、荷蘭式 (Dutch auction)、最高價密封式 (sealed first price auction) 和次高價密封式 (sealed second price auction)。在英國式拍賣中價格逐漸上升，直到只剩下一位買家為止，這種形式常見於藝術品的拍賣。在荷蘭式的拍賣中，價格逐漸下降，直到有人購買為止，這方法多見於拍賣像荷蘭鬱金香這種較難保存的產品。

最高價密封拍賣是由主持人從眾多藏於密封信封裏的報價，選出最高的報價者得標，這方法常見於建築工程的招標。次高價密封拍賣還是由最高報價者得標，但是採用報價中的次高價作為成交價。根據美國哥倫比亞大學經濟學家威廉・韋克瑞 (William Vickrey) 的研究，在次高價密封拍賣下，出價者會較願意披露他們的真實評價，因為他們不必擔心出價太高而故意調低出價。這種拍賣方式在歐美已經逐漸流行。韋克瑞對拍賣機制有深入的研究，他運用混合納殊均衡和納殊的理論去證明，如果每個人都不會因知道了對手的估價而改變自己的估價，則無論使用以上四種方式中哪一種，拍賣價都是一樣的。韋克瑞憑著他對拍賣機制的開創性研究，於1996年與英國劍橋大學的詹姆斯・莫里斯 (James Mirrlees) 同獲諾貝爾經濟學獎。不幸的是韋克瑞在收到獲獎通知後興奮得心臟病發死去，未能親自領獎。

結語

在本書裏，我們談了納殊傳奇的一生，透過介紹納殊的理論，我們淺介了一些博弈論的基本概念。由納殊理論的一些應用，我們了解了納殊工作的影響力和重要性。有興趣深入認識博弈論的讀者，可閱讀加拿大多倫多大學馬丁．奧斯本 (Martin J. Osborne) 教授的新書 "An Introduction to Game Theory"。此書由牛津大學出版社出版。它的頭三章可在下面網址下載。

http://www.chass.utoronto.ca/~osborne/igt/index.html



參考文獻

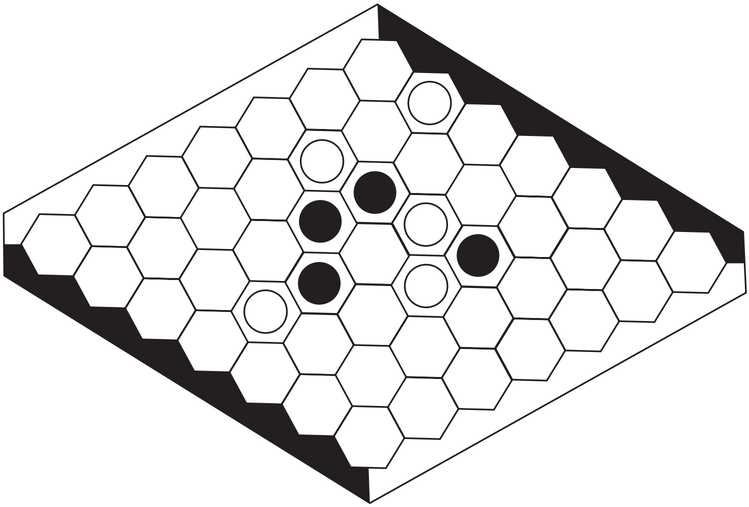
[1] John Milnor, A Nobel Prize for John Nash, The Mathematical Intelligencer Vol. 17. No. 3, 1995, pp. 11–17.

[2] Sylvia Nasar, The Lost Years of a Nobel Laureate, New York Times, 13 November 1994, Business section 1, 8.

[3] Sylvia Nasar, A Beautiful Mind, Faber and Faber, London, 1998.

[4] Martin J. Osborne, An Introduction to Game Theory, Oxford University Press, New York, 2004.

Hex 是一種由納殊與丹麥的皮特・海因 (Piet Hein) 大約同時獨立發明的遊戲。遊戲是在一塊由 n^2 個正六邊形鋪成菱形的棋盤上玩的（見圖）。



棋盤的兩條對邊是黑色的，另外兩邊是白色的，遊戲者交替地將黑色和白色棋子放在六邊形中，落子後棋子不再移動。黑方(白方)試圖用自己的棋子連接兩條黑色（白色）的邊界。遊戲直到一方成功時結束。納殊證明了執先者有必勝的策略。他的證明概要如下：

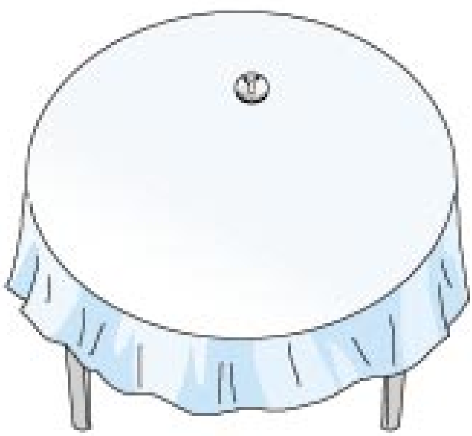
第一步　用數學歸納法 (mathematical induction) 證明，這個遊戲不可能有和局。這等同於要證明，當整個棋盤被黑白子覆蓋時，則必定存在一條從黑邊界到黑邊界的黑色鏈，或一條從白邊界到白邊界的白色鏈，但兩者不會同時發生。

第二步　證明其中一個參與者有必勝策略 —— 無論對手如何走子，自己都能作出恰當的回應，並且最終獲得勝利。這個遊戲的參與者交替走子並具有完全信息，遊戲在有限步結束，加上這個遊戲不可能有和局，根據策墨羅 (Zermelo) 定理（馮・諾伊曼和摩根斯坦重新發現），其中一方有必勝策略。

第三步　用反證法證明執先者有必勝策略。假設第二個遊戲者有必勝策略，第一個遊戲者只需隨機地下第一顆子，然後把自己想像成第二個遊戲者，並按照第二個遊戲者的必勝策略下子。由於第一步對他只有好處而無壞影響，執先者必然獲勝。這樣，第二個遊戲者有獲勝策略的假定導致矛盾。證畢。

證明的第三步是一個著名的論證，稱為 Nash’s stealing strategy argument 。

練習題一： 考慮以下遊戲，在一張圓桌上，雙方輪流放下一元硬幣，硬幣不能重疊，當其中一方無法再放下硬幣時，遊戲便結束，



最後能放下硬幣者勝。跟Hex一樣這是一個參與者交替走子和具有完全信息的遊戲(博弈)，遊戲在有限步結束並能分出勝負。根據前面提過的策墨羅定理，其中一方有必勝策略。你能找出哪一方有必勝策略嗎？他的必勝策略又是什麼呢？（答案見頁 37 。）

附錄二：三人遊戲的混合納殊均衡

要計算出頁 23 的三人遊戲的混合納殊均衡，讀者需要懂得一點概率論 (probability theory) 的知識，例如需要知道如何計算期望值 (expected value)。假設 p, q, r 分別是參與者 A, B, C 豎起一隻手指的機會率。我們用下面兩個表，總結這個遊戲將出現的所有可能情況。

若 C 豎起一隻手指 (r)		B	
		一隻手指 (q)	兩隻手指 ($1-q$)
A	一隻手指 (p)	0, 0, 0	0, 2, 0
	兩隻手指 ($1-p$)	2, 0, 0	0, 0, 1

表 五

若 C 豎起兩隻手指 ($1-r$)		B	
		一隻手指 (q)	兩隻手指 ($1-q$)
A	一隻手指 (p)	0, 0, 2	1, 0, 0
	兩隻手指 ($1-p$)	0, 1, 0	0, 0, 0

表 六

格內每組數字分別代表 A, B, C 的得益。例如在表五裏，0,0,1 代表 A 和 B 都一無所得，而 C 則得一元。請注意，如果 C 豎起一隻手指，只有在 A 和 B 分別豎起兩隻和一隻手指時， A 才能得到獎金，此時他將贏得兩元。而這種情況發生的機會率為 $(1 - p) \times q \times r$。當 C 豎起兩隻手指時， A 只有在自己豎起一隻手指而 B 豎起兩隻手指時，才能得到獎金一元。此情況出現的機會率為 $p \times (1 - q) \times (1 - r)$。因此 A 的期望得益 (expected gain) $E_A(p, q, r)$ 是

$$2(1 - p)qr + 1p(1 - q)(1 - r)$$

同理 B 的期望得益 $E_B(p, q, r)$ 是

$$2p(1 - q)r + 1(1 - p)q(1 - r)$$

而 C 的期望得益 $E_C(p, q, r)$ 則是

$$1(1-p)(1-q)r+2pq(1-r)$$

假設 (p^*, q^*, r^*) 為這個遊戲的混合納殊均衡。我們只考慮 $0<p^*, q^*, r^*<1$ 的情形，換句話說 A，B，C 都不用純粹策略。當 A，B，C 其中一人運用純粹策略時的情況較為複雜，此處從略。根據混合納殊均衡的定義，在處於混合納殊均衡 (p^*, q^*, r^*) 時，如果 B 和 C 不更改他們的混合策略 q^*, r^*，則 A 也不會把他的混合策略 p^* 改變成其他的混合策略 p。因此我們必定有 $E_A(p^*, q^*, r^*) \geqq E_A(p, q^*, r^*)$，所以對所有 $0<p<1$，

$$2(1-p^*)q^*r^*+1p^*(1-q^*)(1-r^*)$$

$$\geqq 2(1-p)q^*r^*+1p(1-q^*)(1-r^*)$$

$$=[(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^*]p+2q^*r^*$$

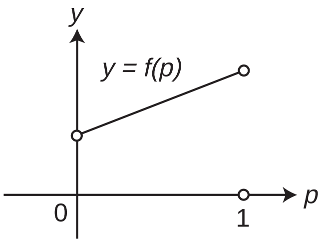
從以上不等式，我們知道 p^* 是線性函數

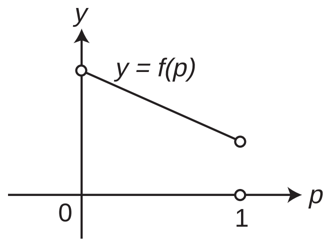
$$f(p)=[(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^*]p+2q^*r^*$$

在 $0<p<1$ 中的極大點 (maximum point)。由此我們可以證明

$$(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^*=0 \qquad (1)$$

假設 $(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^* \neq 0$，則 $f(p)$ 是一個非常數線性函數，此時在 $0<p<1$ 上，$f(p)$ 必定是單調上升 (strictly increasing) 或單調下降 (strictly decreasing)，因而不可能在開區間 $0<p<1$ 上有極大點 p^*（見下圖）。所以 $(1-q^*)(1-r^*)-2q^*r^* \neq 0$ 的假設導致矛盾。





同理，由 $E_B(p^*, q^*, r^*) \geqq E_B(p^*, q, r^*)$ 和 $E_C(p^*, q^*, r^*) \geqq E_C(p^*, q^*, r)$，我們可得

$$(1 - p^*)(1 - r^*) - 2p^*r^* = 0 \tag{2}$$

$$(1 - p^*)(1 - q^*) - 2p^*q^* = 0 \tag{3}$$

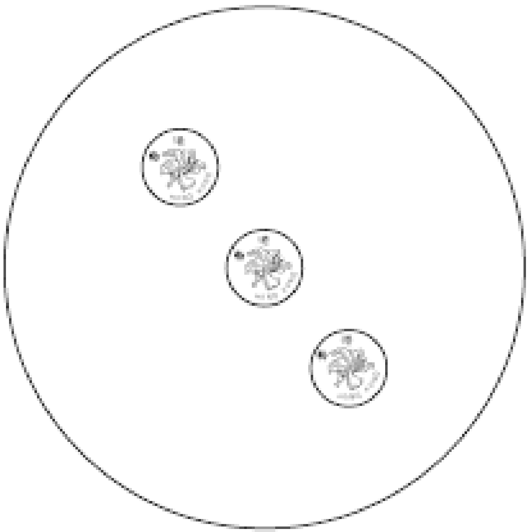
解以上三條方程式 (1)–(3)，我們得到

$$p^* = q^* = r^* = 0.4142...$$

最後我們還須查看一下 $p^* = q^* = r^* = 0.4142...$ 是否真的是一個混合納殊均衡。讀者可以自行驗證當 $p^* = q^* = r^* = 0.4142...$ 時，p^*, q^*, r^* 分別是函數 $E_A(p, q^*, r^*)$，$E_B(p^*, q, r^*)$ 和 $E_C(p^*, q^*, r)$ 在開區間 (0, 1) 中的極大點。根據定義，(0.4142..., 0.4142..., 0.4142...) 是一個混合納殊均衡。所以這個遊戲的一個混合納殊均衡為各人均選擇約 41% 時間豎起一隻手指，59% 時間豎起兩隻手指。

練習題二：運用類似於剛剛介紹的方法，你能找出石頭、剪刀、布這遊戲的混合納殊均衡嗎？（答案見頁 37 。）

練習題一（見頁32）：要找出那一方有必勝策略，我們不妨先考慮一個極端的情況：圓桌小到只能放下一枚硬幣，這時執先者一定獲勝。所以如果有一方有必勝策略的話，則他應該是第一個遊戲者。要證明第一個遊戲者有必勝策略，我們可以嘗試把它找出來。那麼執先者的必勝策略中的第一步應該怎下呢？再想像如果圓桌跟硬幣一樣大時，執先者的第一步只能放在桌的中心，因此它一定是必勝策略的第一步。當第二遊戲者放下他的硬幣後，第一遊戲者應該怎麼辦呢？聰明的讀者想必留意到可以像納殊一樣，偷取第二遊戲者的策略，把第三枚硬幣放在第二枚硬幣的正對面（見下圖）。只要第二遊戲者可以放下硬幣，則第一遊戲者也必定能夠繼續放下硬幣。這便是他的必勝策略。



練習題二（見頁36）：石頭、剪刀、布的混合納殊均衡是兩人選擇 1/3 時間用石頭， 1/3 時間用剪刀和 1/3 時間用布。

數趣漫話

香港大學數學系自1994年起，每學年都舉辦以中學生為對象的《數趣漫話》講座。這些講座旨在拓寬同學們的數學視野，增進對數學的興趣與認識。

本書的內容根據2003年由作者講述的講座編寫而成。

作者簡介

吳端偉，香港大學理學士、香港科技大學數學博士。曾任劍橋大學裘槎基金博士後研究員。現任香港大學數學系助理授教。研究興趣包括複變函數論、複解析動力系統和生物數學。

ISBN 962-86463-3-8

非賣品