課程設計上的「古為今用」
—— 以「截距定理」和「中點定理」為例

梁子傑　循道中學
黃毅英　香港中文大學課程與教學學系
蕭文強　香港大學數學系

引子：兩條日常教學中的定理

中學幾何有兩條定理，名爲「截距定理」和「中點定理」，相信讀者都不會感到陌生。前者說：通過三角形一條邊上的中點且平行於另一條邊的直線，必定通過第三條邊的中點。後者乃前者的逆定理，它說：連接三角形兩條邊上的中點的直線，必定平行於第三條邊。一般學校都會在中三時引入這兩條定理，而課本上的證明通常是如下所述。

(I) 截距定理（見圖一）

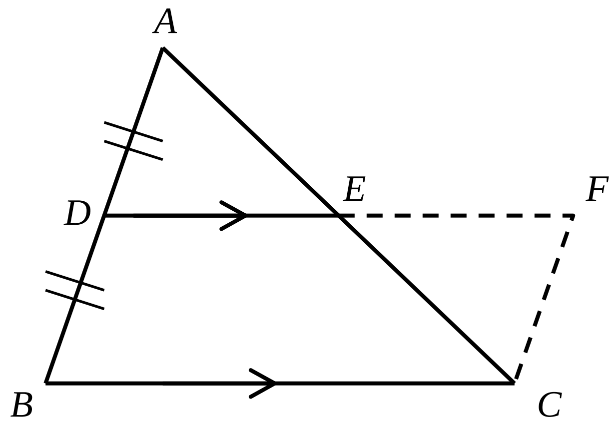

圖　一

設 D 是 AB 的中點，而 DE 與 BC 平行，欲證明 E 是 AC 的中點。通過 C 構作與 AB 平行的直線，交 DE 延長於 F。由於 $BCFD$ 是一個平行四邊形，有 $CF = BD = AD$；從 AD 與 CF 平行也知道 $\angle ADE = \angle CFE$ 和 $\angle DAE = \angle FCE$。故 ΔADE 與 ΔCFE 全等，便得 $AE = CE$，即是 E 是 AC 的中點，

證畢。

(II) 中點定理（見圖二）

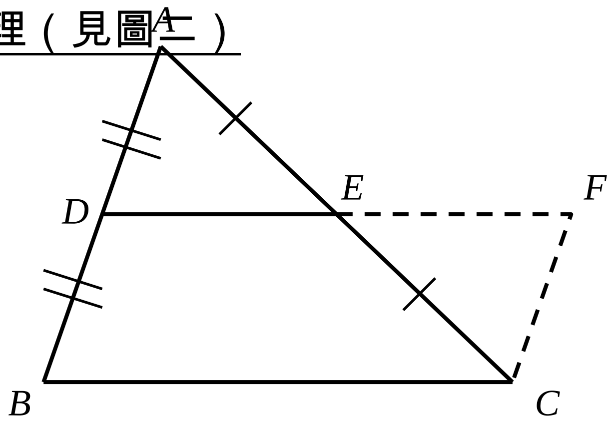

圖　二

設 D 和 E 分別是 AB 和 AC 的中點，欲證明 DE 與 BC 平行。通過 C 構作與 AB 平行的直線，交 DE 延長於 F。從 AD 與 CF 平行得知 $\angle ADE = \angle CFE$ 和 $\angle DAE = \angle FCE$；也知道 $AE = CE$。故 ΔADE 與 ΔCFE 全等，得知 $CF = AD = BD$。由於 $BCFD$ 其中一對對邊既平行亦等長，故 $BCFD$ 是一個平行四邊形；特別地，DE 與 BC 平行，證畢。

上述兩個證明不算太難亦不算太易，用到的只是簡單的全等三角形及平行四邊形的性質，對中三學生而言，要求並不過份。倒是有一次有位學生對截距定理的證明有以下提問：「爲什麼你不考慮 ΔADE 和 ΔABC 呢？它們的所有內角各自相等，故兩個三角形相似。既然 AD 是 AB 的一半，AE 自然也是 AC 的一半，E 就是中點了，何必添加補助線 CF 繞個大彎呢？」類似地，對中點定理的證明也可以提問：「爲什麼不考慮 ΔADE 和 ΔABC 呢？它們有一公共角，且夾角的邊的比例都是 1：2，故兩個三角形相似。因此 DE 與 BC 平行，何必添加補助線 CF 繞個大彎呢？」如果你是班上的教師，你會怎樣向這位深思好疑的學生解釋呢？這個提問確實在真正的課堂上出現過，筆者之一曾多次在數學發展史課上討論，以說明數學史對教與學的裨益，後來亦見諸 [1]。有興趣的讀者不妨參考該文。以下我們對這個提問作一些更詳細的探討。

歐幾里得怎麼說？

讓我們看看古人的解釋，讀一讀歐幾里得（Euclid）成書於公元前四世紀的名著《原本》（*Elements*），便會更清楚這些定理的脈絡。

在初中學到相似三角形的檢定法則，共有三項：

(1) 三角形對應的角相等；

(2) 三條邊對應成比例；

(3) 一個角相等且夾着這個角的兩邊成相等比例。

原來它們分別是《原本》卷六的命題四、命題五和命題六。向前追溯至卷六開首的定義，便知道歐幾里得只介紹相似多邊形的概念，當中自然包括三角形的情況，他不必再介紹相似三角形是什麼。這樣做有一點好處，就是通過命題四至命題六凸顯了相似三角形的一項性質，今天的學生卻可能忽略了。命題四至命題六不單是相似三角形的檢定法則，它們還說明了一個事實：一個本來同時倚靠角和邊去界定的概念，在三角形的場合只需倚靠部份資料即能界定。沒有體會這一點，便可能犯上以下的錯誤證明（雖然結論倒是對的！）。

定理 若 AD、BE 和 CF 互相平行，則 $AB : BC = DE : EF$。（見圖三）

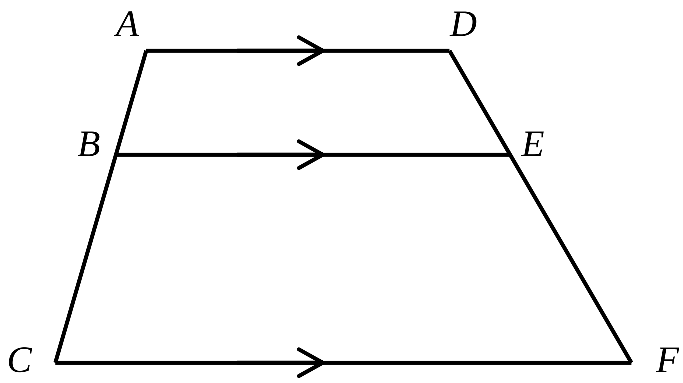

圖 三

「證明」 $ABED$ 和 $BCFE$ 的相應角相等，故它們是相似梯形。

由此得 $AB : BC = DE : EF$，證畢。

怎樣證明命題四至命題六呢？原來那要倚靠卷六的命題二：「若一直線

平行於三角形的一邊，則它截三角形的兩邊成等比例線段；又若三角形的兩邊被一直線截成等比例線段，則截點的連線平行於三角形的第三邊。」截距定理是這命題第一部份的特殊情況，中點定理則是第二部份的特殊情況。再細心閱讀命題四的證明便知道，其實運用第一部份（以下叫做命題二甲）已能證明命題四，再運用命題四證明命題五和命題六，毋須動用第二部份（以下叫做命題二乙）。（當中證明不贅，有興趣的讀者可以找《原本》讀一讀，例如網上有一個版本，網址是 http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html。）

如此看來，利用相似三角形的檢定法則 (1)（即命題四）去證明截距定理（即命題二甲）是犯上邏輯上「貓兒追自己尾巴」的圈套！利用相似三角形檢定法則 (3)（即命題六）去證明中點定理（即命題二乙），並沒有犯上邏輯上的圈套。因此對於前面學生所提出的問題，答覆可以是：「我們可以利用相似三角形檢定法則證明中點定理，但不可以證明截距定理。」但是這個答案仍然不叫人滿意，以下將作解釋。

首先，這個答案只會添加學生的困惑。既然兩個證明都是運用相似三角形的檢定法則，爲何一個合法，另一個卻不合法呢？

綜合前面所說，我們曉得命題二甲、命題二乙、命題四、命題五和命題六全部邏輯等價。（不難證明命題二甲和命題二乙互相邏輯等價，也不難證明從命題五能推論命題四。）但是，我們仍然不曉得如何解釋這些等價命題當中任何一條爲何成立。譬如說，爲何命題二甲成立呢？事實上，命題二甲才是關鍵的結果，較諸相似三角形檢定法則更爲根本。同時，由於可以直接證明命題二甲和命題二乙互相等價，因此運用相似三角形檢定法則證明（推廣的）截距定理或（推廣的）中點定理，不是有些本末倒置嗎？

還有一點値得指出，鋪陳一套理論，表述爲一系列的定理，單是弄清楚定理與定理之間的推導只能算是初步的理解。數學證明的主要功用不僅在於驗證，更在於洞察其理論爲何成立，是什麼關鍵性質把全個局面支撐起來（可參考 [4]）。歐幾里得在《原本》卷六先證明一條更根本的命題一：「等高的三角形（或平行四邊形）的面積之比如同它們的底之比。」運用命題一，歐幾里得證明了命題二（包括二甲和二乙），於是解釋了整件事的來龍去脈，即從三角形面積之比可以得到推廣的截距定理和推廣的中點定

理，而推廣的截距定理則可以證明相似三角形的檢定法則（見圖四）。這不單顯示了面積和比例在《原本》的重要性，亦理順了前面提過的幾條命題之間的邏輯關係，對我們今天的幾何教學頗富啓發（可參考 [1]）。

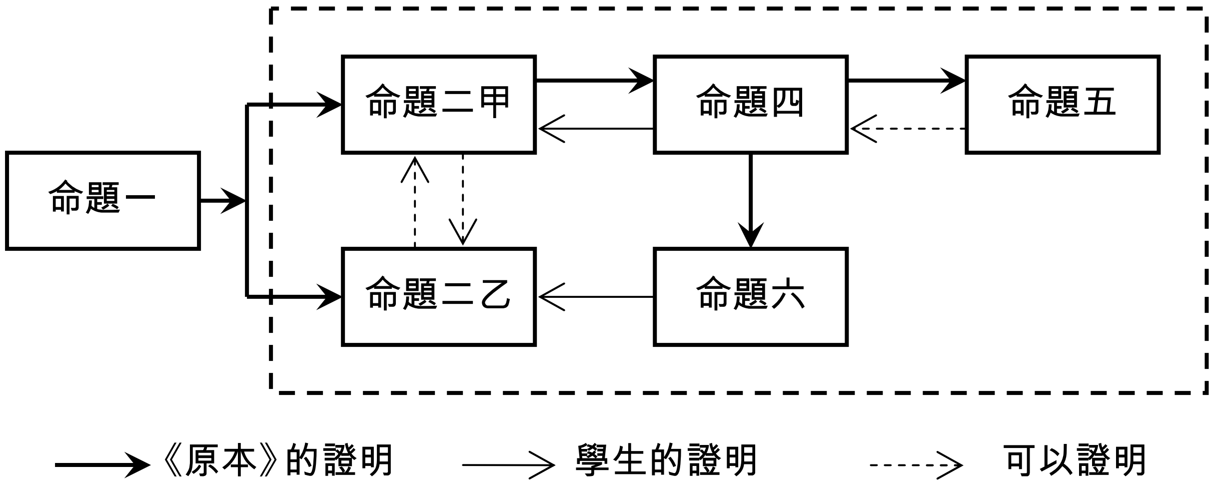

圖　四

回到引子的兩個證明，再多說一句話。這兩個證明只運用了全等三角形理論及平行線理論，卻沒有運用相似三角形理論。一來，理論較爲初等；二來，其實已經在可公度量的情況下推廣了截矩定理和中點定理。要證明一般情況下定理仍然成立，可避不開《原本》卷六定理二了。

我們把截距定理和中點定理的數學內容不厭其煩地說了那麼多，倒不是爲了討論如何講授那兩條定理，也不是爲了討論如何講授更一般的相似形理論。我們既沒有論及如何通過實用例子（如縮細或放大圖樣或模型、地圖或圖則的比例、測量等等）引入相似形的概念，也沒有交待清楚卷六命題一和命題二的證明。對於前者，讀者都一定有不少教學經驗，各師各法；對於後者，無法避免要先討論比例理論（《原本》卷五的設置正是爲了這個目的），可以是另一篇文章的題材了。在以下一節，讓我們看看這兩條定理的證明給我們什麼啓迪。

歷史真是那麼遙遠嗎？

有人或者會提出質疑：雖然《原本》是一個十分嚴謹的體系，我們爲

何一定要一成不變地跟隨它安排的命題次序去教學呢？事實上，有文獻曾提出與《原本》不盡相同（教學用）的公理系統或想法（見 [9]、[6]，亦見 [5] 的附錄）。這在普及教育下的「大眾數學」有著另一層意義：由於學習數學之目的不限於培養數學家，故此學校數學不必以數學經典作教本。（《原本》所標示的鋪排次序是否就是數學家真正做數學時的製作過程，那可是另一個值得探討的問題。）然而，數學經典之成爲經典，自有其來由。譬如《原本》的鋪排不只是爲了邏輯上之嚴謹，也有實際的原因。簡單地說，如果我們先向學生教授「三角形對應角相等就有對應邊成比例」，然後用它證明「截距定理」也好、「中點定理」也好，看似很方便，但問題旋即變成先要證明前者，而它的證明（若不倚靠命題二）殊不容易。不少人沒有察覺這點，只因爲現今的數學課程內，相似三角形的檢定法則往往被當作設定，不一定對它給出證明吧了！（五六十年前的課本，編排與此有別，請見附錄。）

學生常常困惑：數學家何以把數學弄得那麼複雜。其實層層分析，不少數學的定義、概念的形成、命題出現的次序，都有非常合理的原因。教師不正是要讓學生看到這一點嗎？從這個角度考慮，數學史不只是前菜或甜品，也是主菜，甚至是具有指導作用的廚藝哲學（可參考 [2]、[3]、[7]、[8]）。我們不是說學生學習數學要完全依循歷史的發展途徑，但後者顯然是課程設計者的一盞指路明燈。

那麼，通過對這兩條定理的討論我們主要想談什麼呢？我們主要想說明，參考前人的智慧或者能夠幫助我們對全局有個更透澈更全面的理解，這就是本文標題「古爲今用」的意思。上述學生的提問源自課程內容佈置的混亂，爲了在中一或中二引入相似形，我們只介紹了相似形的概念卻不作進一步的解釋，省略全部結果的證明。到了中三，當我們要求學生證明這些結果時，卻又從來沒有說明起點是那裏。於是學生無所適從，不知道那些結果要證明，那些結果可以假定爲已知，那些結果比較其他些結果爲更根本。學生感到幾何難於掌握，是可以理解的。遺害更大者，是很多學生「聽話」地「囫圇吞棗」，應付過了考試便算，心裏卻誤以爲數學就是如此零碎鬆散但又企圖披上嚴謹外衣的科目，掩掩映映之間只靠一位「權威人士」作最後仲裁定案是對或錯。於是很多學生認爲數學不是他們所能理解的科目（does not make sense），與它疏離。作爲一位教師或者課程設計者，要不要想一想呢？

當然，「古為今用」並不等同「復古」。現今仍然沿用二千多年前或者五六十年前的一套去教學，不見得就解決了問題。截距定理和中點定理所帶來的問題，提醒我們有必要全盤考慮中學幾何課程的編排，那可是另一篇文章的主題了。

參考文獻

[1] 陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1994）。教（學）無止境：數學“學養教師”的成長。載林智中、韓孝述、何萬貫、文綺芬、施敏文（編）。《香港課程改革：新時代的需要研討會論文集》（頁 53–56）。香港：香港中文大學課程與教學學系。增訂版刊於蕭文強（編）（1995）。《香港數學教育的回顧與前瞻 — 梁鑑添博士榮休文集》（頁 129–137）。香港：香港大學出版社。後又轉載於黃毅英（編）（2005）。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育 — 蕭文強教授榮休文集》（頁 38–45）。香港：香港數學教育學會。

[2] 梁子傑（2005）。數學史：頭盤？主菜？甜品？。載黃毅英（編）。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育 — 蕭文強教授榮休文集》（頁 411–417）。香港：香港數學教育學會。

[3] 黃毅英（2007）。從課程看回融入數學史。《HPM 通訊》。10 卷 2–3 期，3–7。

[4] 蕭文強（1989）。《數學證明》。南京：江蘇教育出版社。修訂版（2007）。台北：九章出版社。

[5] Cederberg, J.N. (1989). *A course in modern geometries*. Berlin: Springer-Verlag

[6] School Mathematics Study Group (1965). Geometry: Student's Text. Pasadena, CA: A.C. Vroman.

[7] Siu, M.K. (1997). The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. *Bulletin of the Hong Kong Mathematical Society, 1*, 143–154. Reprinted in V. Katz (Ed.) (2000). *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 3–9). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

[8] Siu, M.K., & Tzanakis, C. (2004). History of mathematics in classroom teaching – "Appetizer? main course? or dessert?" *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3* (1–2), v–x.

[9] Wu, H-H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 221–237.

附錄

五六十年前，不少香港中學採用英國的幾何課本，通常是 C.V. Durell 的 *A New Geometry* (1939) 或 A.B. Mayne 的 *The Essentials of School Geometry* (1933)，書內的敘述仔細詳盡得多。那些課本是經改編後的《原本》，保留了一定的原來編排，但適當地作了簡化。相似形的敘述是書的最末部份，那些相似三角形的檢定法則都給出證明，就如同《原本》一般，只是把《原本》卷六命題一的證明更改了，換上中學生都熟悉的樣子：三角形的面積是底乘高的一半，因此等高的三角形的面積之比如同它們的底之比。

仔細審視，便知道難點給轉移到矩形面積的計算，即是看來毫不起眼的「矩形面積 = 長 × 闊」！兩部課本都用貌似簡單的單位方格形劃分去證明這條公式，但兩位作者都十分老實，加了一項腳註：這個證明只當矩形的長和闊是可公度量時才適用，否則要另作證明。Mayne 更詳盡地加了一個附錄，原原本本介紹了《原本》卷五的比例理論及卷六命題一的證明。不過，他也加上一句：「這不在中學會考範圍內，考生只需懂得可公度量情況下的證明。」筆者之一當年用的課本就是 Mayne 的書，也曾好奇地看了一看這部份，卻是「一頭霧水」，說不上明瞭了什麼，但至少有個印象：面積計算可不是簡單的事！

事實上，《原本》從來沒有給出圖形面積的計算公式，那並不符合當時希臘數學的風格。譬如「矩形面積 = 長 × 闊」，我們只能從卷六命題一（等高的平行四邊形的面積之比如同它們的底之比）推導出來。又譬如「圓的面積 = 圓周率 × 半徑平方」，我們只能從卷十二命題二（兩圓的面積之比如同它們的直徑平方之比）推導出來。箇中細節，離開本文主題遠了，不贅。

作者電郵： jckleung@netvigator.com
nywong@cuhk.edu.hk
mathsiu@hkucc.hku.hk