數學競賽 —— 是好、是壞？是樂、是苦？

蕭文強

香港大學數學系

緒言

數學競賽只是眾多課外活動之一，理應具備提昇數學教學的正面作用，而不應引發是否有負面作用的爭議。那麼，為什麼數學競賽有時會引起一些負面的爭議？究竟數學競賽這項課外活動有甚麼好處和壞處？

我不算是數學競賽的活躍份子，但嘗試從過去在這項活動得到的有限經驗，分享一些個人見解，希望促使那些對這項活動有豐富經驗並且有深入認識的人士，一起加入討論。*

在討論之前，我先說明本文將**不會**觸及有關這項活動哪些方面的討論。近十年間，數學競賽活動的發展如雨後春筍，已經成為一項「企業」，其中有些圖的是利，有些圖的是名。就算這些活動對學習數學可能有間接好處（對此我甚表懷疑），我們若要針對這點進行討論，從數學學習而言，並無實質意義。反而，我們應該從社會和文化角度出發，即是問：是什麼促使家長要求子女參加這些競賽，或要求他們到那些競賽訓練中心上課，甚至有時強迫孩子參加？撇開這些讓我回到要討論的問題：數學競賽與數學和數學教育的關係。

數學競賽的「好處」

我與國際數學競賽直接的接觸只有兩次，一次在 1988 年，另一次在 1994 年。1988 年第二十九屆 IMO（國際奧林匹亞數學競賽）在澳洲坎培拉(Canberra)舉行，當年香港首次

---

* 本文是 2012 年 7 月在台北舉行的國際數學競賽教育論壇上作的英語講演，題為：The good, the bad and the pleasure (not pressure!) of mathematics competitions。作者感謝主辦者邀請為講者，得成此文。尤其得到九章數學教育基金會理事長孫文先先生的支持和鼓勵，心存感激。文本刊於 *Mathematics Competitions* , 26(1) (2013), pp.41-58，現由陳鳳潔女士迻譯，承蒙 *Mathematics Competitions* 主編同意刊於《數學傳播》，作者謹向譯者及該兩本期刊的主編致謝。

參賽，我幫忙培訓香港隊員。1994 年第三十五屆 IMO 在香港舉行，我是協調員之一，協助改卷工作。從這兩次經驗我看到 IMO 可以如何在數學教育上產生好的影響，這是我以前忽略的。為此我重新檢視 IMO 並且寫了一篇文章，容我從文章節錄三項我認為的數學競賽的「好處」[4, pp.74-76]：

（1） 所有參賽者都清楚知道，清晰和有邏輯條理表達答案是獲取高分數的必要條件。當我批閱他們的答案時，有一種舒暢的感覺，與批改我的學生的試卷時，心情大不相同。他們的答案就算不完整或是錯誤，我仍然能看得到他們的思路。反觀我的許多學生，無論我怎樣忠告、勸誘、懇求、抗議（除了威脅，什麼都試過！），他們只會想到什麼便寫什麼，所寫的東西都是支離破碎，完全沒有連貫性，有時甚至與題目毫無關聯。由於受到自中學以來考試方式的影響，不少我的學生習慣了記得什麼便寫什麼，管它跟題目有關與否，也管它前後次序顛倒與否，反正改卷者是按照評分標準的要點打分數，只要在答案中某處出現該要點便可得分！上了大學後不少學生依然故我，東拉一句西扯一句。其實，答對與否在其次，至少應該要求學生有起碼的清晰表達能力吧？（可惜連這點他們也做不到。）

（2） 所有參賽者都知道，解答每道題目平均可以用上大概一個半小時，沒有人會認為一道題目能夠在數分鐘內便找到答案，因此，大部份參賽者都具備解題需要的韌力和堅毅精神。他們不輕言放棄，而會嘗試用各種各樣的方法探索問題，以不同角度思考，利用特殊例子或實驗數據探討。很多我的學生所作的剛好相反，由於他們自小在學校已浸淫於考試文化，思想受到局限，當發現試題不能套用慣常的技巧解決便馬上放棄。當考試是要學生在短時間完成時，這套應對方法猶情有可原，但不幸得很，很多學生把這種習慣帶到平日學習上。他們認為，一道問題如果不能在三分鐘內解決，這個問題便是難題，是他們沒有能力解答的，因此不應浪費時間去思考！這種「速成學習」對於真正獲取知識有害無益，學習者的好奇心受到伐害，因而失掉學習的樂趣。

（3） 有些參賽者有一種值得讚賞的好習慣，他們不單把數學內容寫下來，而且還把怎樣思考的過程也寫在答卷上。有些人會說明從某一步開始便不能再走下去，或他們作了些什麼但似乎未能達到目的，又或決定再嘗試從另一方面著手。我非常欣賞這種「學術真誠」的態度。（諷刺的是，有些領隊或副領隊為隊員辯護說項，認為隊員其實已經差不多給出答案，他們理應獲得較高分數。可能隊員真的可以得到答案，可是他們沒有寫出來，而領隊的好意像是要替他們把答案填上去。）我的學生所作的剛好相反，他們先寫上已知的條件（即抄了題目的開頭部份），結尾寫下結論（即抄了題目的結束部份），中間填上一些與問題有關或無關的零碎資料，接著是

完全沒有根據的推論：『由此而得……』。我對這種以廢話作為答案意圖蒙混的不老實作風，非常失望，比起那些不懂如何答題的表現，這更叫我失望。

由於得到一位年青朋友——2012 年香港 IMO 隊員盧安迪——的啟發，我要添加一項數學競賽的好處。他回想由小學參與數學競賽得到的經驗，認為數學競賽最主要的好處，在於它能引起年青人對數學的熱愛，激發他們對這個科目的興趣。無論他們將來是否選擇以數學研究為志業，參與數學競賽的經驗可能對年青人未來的事業產生重大影響，那些後來因為種種原因，不能從數學競賽獲益的人們，也許是他們對數學欠缺真正和持久的熱誠。

數學競賽的「壞處」

雖然看到上述關於數學競賽的好處，就學習數學和研究數學而言，我對數學競賽有一種憂慮，特別是在數學競賽表現優異的人，憂慮更甚。在數學競賽表現好的人，會特別喜好用一些非常聰明但卻是權宜之計的方法去解答問題，他們欠缺有系統地琢磨問題的耐性，以及對事情的全面觀照；會傾向找一些專為競賽設計而題意清晰的題目，並不善於處理那些不怎麼清晰的模糊情況。數學研究不是要找出既定的答案，而是要探究各種情況，盡可能加深對問題的理解。能夠提出一個好的問題，比能夠解答由別人提出、而且已經有了答案的問題更為重要。在數學研究中，我們甚至可以改動問題（多加一些條件或放寬一些要求）以便取得進展。很可惜，這些都不是數學競賽的參賽者容許做的。

當然，在各種數學競賽的參賽者當中，很多有能力的好手後來成為出色的數學家，但很多即使繼續在數學事業發展，也只是停留在解答數學競賽問題好手的水平，其他不少人則完全放棄了數學。這個情況本身不是問題，因為每個人都有自己的抱負和興趣，而且沒必要人人都當數學家。但是，如果他們放棄數學，是因為厭倦了這個科目，或年青時參加數學競賽因為不當操練而對數學有不好的印象，那就太可惜了！

我們看看幾個著名數學競賽的歷史，如匈牙利的 Eötvös Mathematics Competition [5]，自 1894[†]年創辦後，一大群得獎者後來都成為有名望的數學家 ；又如 1959 年始成立的 IMO 許多拿到獎牌的選手，在其後的數學生涯中，因為他們在研究上的重要貢獻而獲獎，如

[†]同年創刊有關中學數學和物理的期刊 *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*，在教學上的作用值得我們留意。讀者欲知詳情，可瀏覽該期刊之網站 [7]。

Fields Medal， Navanlinna Prize， Wolf Prize …[6]；又如美國的 William Lowell Putnam Mathematical Competition [8]，是大學本科生參加的競賽，其中很多得獎者（Putnam Fellow），其後也是數學重要獎項的得獎人。另一方面，Fields Medal、Crafoord Prize、Wolf Prize 得獎人丘成桐， 公開表達他反對數學競賽；相傳上世紀著名俄羅斯數學家 Pavel Segeevich Aleksandrov (1896-1982)曾經說過，如果他曾參加數學奧林匹亞競賽，他就不會有日後的成就！要解釋這樣的兩極看法，必須從體驗觀察數學競賽這項活動的過程去理解。

在參與 1994 年第三十五屆 IMO 的改卷工作中，我發現一些隊伍取得很高的分數，可是全隊六名隊員的作答方法幾乎千篇一律，可見訓練有素。相反地，有些隊伍不是所有的隊員都拿到高分，但隊員作答同一道問題時，各自依循不同思路，各師各法，從中窺見他們靈活思考、獨立工作的能力和豐富的想像力。這個現象令我想到，過度操練是否危害學生的一些內在好素質，如獨立思考、想像力、原創力等？如果屬實，為了數學競賽不斷操練學生，是否會使這項本來有意義的活動失卻原本的好處？倘若不是過度操練，而是引導學生延伸探討競賽題目，是否可以使年青人更容易體會到數學研究是什麼一回事？我敢肯定，那些後來成為出色數學家的參賽者，他們在年青時期都有對競賽題目做進一步探究的工作。

我以下面兩個例子說明。第一個例子是一道著名的 IMO 題目，從中可以看到競賽題目的要點不單在於答案。另一個例子是一項研究題材，主要的問題（據我所知）到目前還未完全解決；我們來看看一個研究問題與一道數學競賽題有什麼不同。

雖然我沒有真正參與 1988 年第二十九屆 IMO，因為幫忙培訓參賽者，自然特別留意那一屆的題目。第二十九屆 IMO 第六條問題如下：

「設 a 、 b 為正整數，且 $ab+1$ 整除 a^2+b^2。求證 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是完全平方整數。」

保加利亞隊一名少年（Emanouil Atanassov）用了一個非常巧妙的方法，因而獲得當年的特別獎。他的作法是，先假設 $k=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ **不是**平方數，然後把它寫成下面的形式：

$a^2-kab+b^2=k$, 其中 k 是給定的正整數 （*）。

注意，任何滿足（*）的整數數偶 (a,b)，都滿足 $ab\geq 0$, 否則 $ab\leq -1$，加上已知 $a^2+b^2=k(ab+1)\leq 0$，便得到 $a=b=0$，因此 $k=0$！而且，由於 k 不是完全平方，因此 $ab>0$ ，亦即 a 或 b 都不可能等於 0 。 設 (a,b) 是滿足（*）的整數數偶，其中 $a>0$（因此 $b>0$ ），而且 $a+b$ 取最小值。可以假設 $a>b$（由於對稱原因，可以假設 $a\geq b$ 。注意 $a\neq b$ ，否則 k 的值要介於 1 和 2 之間！）把算式（*）看作二次方程， a 為方程（*）的正根，a' 為此方程的另一根，則 $a+a'=kb$ ， $aa'=b^2-k$。因此 a' 也是

整數，(a',b) 是一對滿足方程（*）的整數數偶。由於 $a'b>0$ 和 $b>0$，因此 $a'>0$。但由於

$$a'=\frac{b^2-k}{a}\leq\frac{b^2-1}{a}\leq\frac{a^2-1}{a}<a,$$

故 $a'+b<a+b$，這樣便與 (a,b) 的選擇構成矛盾！這便證明了 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 一定是一個整數的平方。〔由於我未能讀到該參賽者的答卷，以上的解答是根據輔助資料 [1, p.505] 重建，其中關鍵的想法是：（1）選擇一對最小值的解 (a,b)，（2）把算式（*）看作二次方程。〕

縱使這個證明十分巧妙，卻引起一些疑問：（1）是什麼令人想到 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是一完全平方？（2）這個證明的重點在於以歸謬法論證 k 不是完全平方，但證明的過程好像對於這一點輕輕帶過，不容易令人看到如果 k **不是**完全平方時會出什麼亂子。更重要的是，這個用反證法的證明，即使**確認**了結果，卻**沒有解釋**為何 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 一定是完全平方。

以下一個沒有那麼漂亮的解答，是我的嘗試。我最初讀到題目時，是在歐洲的旅途上，我有一個「錯誤瞭解」，令 $a=N^3$ 和 $b=N$，則

$$a^2+b^2=N^2(N^4+1)=N^2(ab+1)。$$

我便得來一個印象，以為 $k=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 的任何整數解 (a,b,k) 都是 (N^3,N,N^2) 這個形式，因此作了一項策略，要從 $a^2+b^2=k(ab+1)$ 推導出下面的等式：

$$[a-(3b^2-3b+1)]^2+[b-1]^2=\{k-[2b-1]\}\{[a-(3b^2-3b+1)][b-1]+1\}。$$

如果成功，我便能把 b 逐步減 1 至最後得到 $k=\frac{a^2+1}{a+1}$，因而 $a=k=1$。逆轉剛才的步驟便可以解答問題。在火車旅途上，我基於這項策略反覆計算了好一陣子，但得不到結果。回到家後，借助計算機硬幹，有系統的查證並找出真正的解，得到以下（部份）解：

a	**1**	**8**	**27**	30	**64**	112	**125**	**216**	240	**343**	418	**512**	…
b	**1**	**2**	**3**	8	**4**	30	**5**	**6**	27	**7**	112	**8**	…
k	**1**	**4**	**9**	4	**16**	4	**25**	**36**	9	**49**	4	**64**	…

此時我看到為何我的策略失敗，原因是除了 (N^3,N,N^2) 這個形式的解，還有別的。不過，工夫也不是白費。當我盯著這些答案，我看到對於某一個 k，以遞歸方法可以得到答案 (a_i,b_i,k_i)，其中 $a_{i+1}=a_ik_i-b_i$，$b_{i+1}=a_i$，$k_{i+1}=k_i=k$。

餘下要做的是驗證，如果正確，一切都清楚了。一組「基本解」的形式是 (N^3, N, N^2) ，其中 $N \in \{1,2,3,\ldots\}$。其他的解都是由這「基本解」以上述的遞歸方法產生。特別地，$k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是一整數的完全平方。通過這番工夫，我理解問題所在，比我只是閱讀前述的巧妙證明清楚得多。

[感謝蕭文傑的提點，我們可以採用相同的關鍵想法，把本來用的間接證明，改為更清晰的直接方法去處理。開始如前所作，設 $c = \min(a,b)$ 和 $d = \max(a,b)$。設二次方程

$$x^2 - kcx + (c^2 - k) = 0$$

有 d 為正根，另一根為 d' 。 由於 $d + d' = kc$ 和 $dd' = c^2 - k < c^2 \le dc$，已知 d' 是一小於 c 的整數根，因此 $d' + c < 2c \le a + b$。選擇 (a,b) 時已 決定 d' 不能是正數。另一方面，有

$$(d+1)(d'+1) = dd' + (d+d') + 1 = (c^2 - k) + kc + 1 = c^2 + (c-1)k + 1 \ge c^2 + 1 > 0，$$

即得 $d' + 1 > 0$， 於是 $d' = 0$。由此得到 $k = c^2 - dd' = c^2$ ，即 k 是完全平方。]

第二個例子是關於 Barker 序列這項研究題材。一個 Barker 序列是長為 s 的二元序列，滿足以下條件：該序列和每一個它自身向右平移一位的序列在相疊部份裏面相同與不相同的項頂多相差一個。較正式的術語是：該序列的非周期自相關函數在所有不同相位的絕對值只是 0 或 1 。舉一些例子， 11101 是個長為 5 的 Barker 序列，但長為 6 的序列 111010 並不是 Barker 序列。長為 8 的序列 11101011 也不是 Barker 序列，但 11100010010 卻是長為 11 的 Barker 序列。在通訊科學群同步數位系統的應用上 R. H. Barker 首先 在 1953 年引入這一類序列，不久便發現有長為 2、3、4、5、7、11、13 的這一類序列。在 1961 年 R. Turyn 和 J. Storer 證明了不存在長為大於 13 的奇數的 Barker 序列。在組合設計領域有一個有名的猜想，認為不存在大於 13 的 Barker 序列，超過半個世紀後，時至今天，雖經眾多數學高手努力鑽研，依然懸而未決。雖則如此，這個猜想激發了不少組合設計和通訊科學上二元序列或方陣的研究。為了更好理解原來的問題，有些研究者把原來的問題修訂，轉而探討二維方陣甚至更高維的情況，或是探討非二元序列或方陣，擴展序列元的範圍至兩個以上的字母。也有些研究者轉為探討一對序列（叫做 Golay 互補序列對），它們滿足某種適當的相關函數性質。正是如此，這個貌似競賽問題的有趣題目開啟新的數學領域、產生新的方法和技巧，甚至在別的數學領域也派上用場。（有興趣欲知道更多的讀者，可以參看一篇介紹這個研究題材的出色論文 [2]。）

在學校所學習的數學與「奧林匹亞數學」

由於數學競賽測試的是選手的解題能力，而不是他們對某一課題的認識水平，因此題目都環繞在一般課題，如初級數論、代數、組合數學、數列、不等式、函數方程式、平面和立體幾何等等，使這個年齡組別的青少年，不論來自什麼國家、地區，選用什麼課程，都能明白試卷的題目。久而久之，人們便把這些課題綜合統稱為「奧林匹亞數學」，簡稱「奧數」。一個問題常常縈繞在我腦際：學校不是也可以利用這些「奧數」在課堂教數學嗎？讓學生認識數學的性質並且對它產生興趣是數學教育目的之一，為了達到這個目的，我們可以在日常教學中加入一些有趣和非常規的數學。數學課本 ***Alice in Numberland*：*A Students' Guide to the Enjoyment of Higher Mathematics*** (1988) 的作者 John Baylis 和 Rod Haggarty 在書的序言有這麼一段話：「每位專業數學家都熟知趣味與認真態度並非是不相容的，我們要注意的是確保讀者能享受學習中的娛樂成份，但又不忽略數學內容上的重點。」

把「奧數」用於課堂上，不等於把數學競賽的題目直接搬到課堂，而是利用其中的課題種類、擬題精神、題目設計和構思，傳授正規課程裏面的數學。所謂「高層次思考」應該是數學教育目的之一，但我們常常低估學生的能力和他們對數學的興趣，以為他們只喜歡刻板常規的東西（因此通常被認為是「容易」？）其實他們可能厭倦了稀釋的數學內容，覺得乏味而提不起勁。此外，好的題目不僅讓學生受益，對教師而言也是一種挑戰，讓他們在設計好題目的過程中自我提升。在這方面，數學教師利用數學競賽豐富學生的數學經驗，教師本身也同時受益。要借助數學競賽得到更好的教學成果，精心設計的教師研討會，以及適當處理的教學材料，都是非常有用的 [3, pp.1596-1597]。

讓我說一個有名的故事，是關於著名數學家 John von Neumann (1903-1957) 解答朋友提出的問題：兩名單車好手 A 和 B，相距 20 里，以時速 10 里各自同時向對方進發；一隻蜜蜂以時速 15 里由 A 出發飛向 B，抵 B 後又飛回 A，如是者來回 A 與 B 之間；問 A 和 B 相遇時蜜蜂飛了多少里？von Neumann 馬上給出答案：15 里。朋友認為他能夠如此迅速答對，一定是知道作答的巧妙辦法，即 A 和 B 於 1 小時後相遇，而在 1 小時內蜜蜂飛了 15 里。但 von Neumann 的回答令他驚訝萬分，原來 von Neumann 沒有使用什麼巧妙辦法，他是計算了一列無窮級數！（我留待讀者自行解答，如何以無窮級數找到答案。）

對我來說，這個故事十分有啟發意義。首先，它告訴我，不同的人可以有不同的方法解答數學問題，沒有理由強迫所有人採用你的方法。同樣地，沒有理由強迫所有人採用你的學習方法。關於這一點，我在教學生涯後期才真正領悟到。有一段很長的時間，我認為教

線性代數，用幾何圖像是最容易令學生明白的方法，因而我採用分析方法時常輔以幾何觀點。直至今天，我還是這樣做。不過曾經有一些學生對我說，他們比較喜歡分析方法，因為他們對幾何想像有困難。Von Neumann 的心算速度快如閃電，可能他第一時間腦袋出現的是一列無窮級數，而不是計算兩名單車手何時相遇呢！

其次， 兩種解題方法各有優點。方法一的巧妙處是捉到問題的重點，從兩名車手何時相遇著手，一擊即中，快而準地找到答案。另一方法是找出一列無窮級數之和，需時較久（但對 von Neumman 而言，並非如此！），看來也較累贅和不清晰，但它是有系統地解決問題，甚至不惜以硬幹找出答案，需要耐力、決心、務實和謹慎行事，而且它可以鞏固一些基本技巧和培養學生良好的工作習慣。

這個故事令我聯想到做數學有兩種不同的方式，用軍事作比喻，一種是正規陣地戰，另一種是飄忽游擊戰。前者是多數小學中學和大學採用的方式，即教師有系統地安排課程和仔細設計教材，並輔以習作訓練。後者多數是訓練參加數學競賽時採用的方式，即讓學生接觸各種各樣不同的題目，訓練他們採用不同角度看問題，以及搜集一大堆竅門和策略。兩種方式各有好處，互補長短，且相輔相成。打正規陣地戰，我們也需要靈活性和處理突發事情的能力；打飄忽游擊戰，我們也需要有事前準備和基礎訓練工夫。數學教學和學習也是如此，我們不能單單只教一些竅門和策略，應付解答一些特定的題目，也不能只花時間解釋理論，做一些按公式便可以處理的習作；教學時我們應該讓這兩種方式互補。南宋將軍岳飛（1103-1142）的傳記中有以下一句話：「陣而後戰，兵法之常。運用之妙，存乎一心。」

有時第一種方式看似相當平淡乏味，而第二種方式卻緊張刺激。不過，我們不要輕視貌似平淡的第一種方式，它可以處理更廣泛的情況。第二種方式是一種臨時技倆，雖然巧妙，但只能適用於特定題目。因此，第一種方式比第二種方式更有威力。當然，很多時巧妙的臨時技倆，可以發展為功能強大的一般方法，或者成為大架構中的一部份。一個經典的例子是微積分的發展史。早期，只有數學大師才懂得採用精妙特殊的技巧計算某些幾何圖形或物體的面積或體積，例如古希臘的 Archimedes （c. 287 B.C.E. – c. 212 B.C.E.）和中國的劉徽（公元三世紀）；今天，當我們閱讀他們的計算方法，只能讚嘆他們的聰明才智，那是成績普通的學生無法辦到的。然而，在有了十七至十八世紀發展起來的微積分之後，一般程度的學生，只要學習了微積分這個課題，便懂得計算很多幾何圖形或物體的面積或體積。

我再用一個例子來說明，是一名參加競賽者的父親提出來的數學問題：有一等腰三角形 ΔABC, 其中 $AB = AC$ ，$\angle BAC$ 的大小是 20°。取AC 上一點 D 使 $AD = BC$， 求 θ ，即 $\angle ADB$ 的大小（見圖 1）。

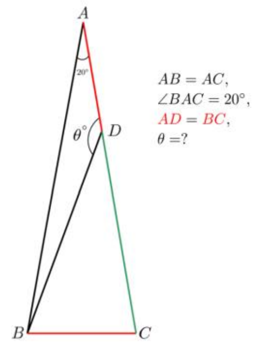

圖 1

如果我們使用正弦法則，很容易找到答案：

$$\frac{AD}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{AB}{\sin\theta} \quad，AD = BC = 2AB\sin(\alpha/2)，$$

其中 α 是 $\angle BAC$ 的大小，因此得到

$$\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2) - \cos\alpha} 。$$

當$\alpha = 20°$，$\theta = 150°$。

但是，這是一道小學數學競賽題目，我們怎能要求參賽者懂得正弦法則呢？那麼，有沒有辦法不必使用這樣深奧（對小學生來說）的工具？我找到一個解決的辦法：構作等邊三角形ΔFBC ，其中點 F 是在已知三角形 ΔABC 之內。在 AB上構作點 E 使 $AE = CD$ (見圖 2)。

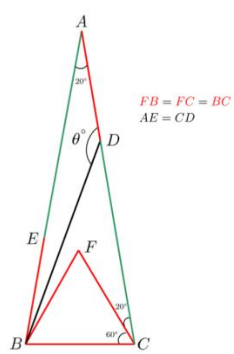

圖 2

（通過構作DE, DF）不難找出 $\angle DBE$ 的大小為 10°（留待讀者自行計算），因此 $\theta = 180° – 20° – 10° = 150°$。是什麼讓我想到構作等腰三角形$\Delta FBC$這道「花招」呢？因為我曾經見過一道類似的題目：已知有一三角形 ΔABC ，其中 $AB = AC$ 和 $\angle BAC$ 的大小是 20°。在 AC 和 AB 上分別取點 D 和點 E 使 $\angle DBC$ 的大小是 70° 及 $\angle ECB$ 的大小是 50°，求 φ，即 $\angle BDE$ 的大小（見圖 3 ）。

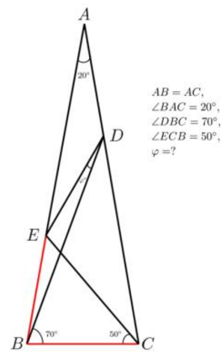

圖 3

構作等邊三角形 ΔFBC，其中點 F 是在已知三角形 ΔABC 之內，可以計算得到 $\varphi = 10°$（留待讀者自行計算）。這兩道題目其實都描繪同一情況，因為以第二題的條件，可以證明 $AD = BC$。這樣做，我們只要具備全等三角形的知識，不用懂得三角學的正弦法則。但如果$\angle DBC$ 和 $\angle ECB$ 的大小不是分別是 70° 和 50°，這個幾何證明方法便不適用了！不過，我們還是可以用正弦法則找到 $\angle BDE$ 的大小。雖然方法常規刻板，並不巧妙，但它涵蓋一般情況，即使是程度一般的學生，只要學會了正弦法則這課題便能做到的。

數學競賽是樂（不是苦）

未參與第 35 屆 IMO 改卷工作前，我對數學競賽的價值懷有不信任的戒心，時至今天，我還是懷有一定的戒心。特別是參與了 1994 年 IMO 的工作，看到一些領隊和副領隊，太過「熱心」為己隊爭取高分，而有不適當的表現，使我想到過度強調競賽勝負，會使青少年對整項活動有不健康的看法。數學競賽的主辦機構、教師、家長和學生，把競賽的勝負看得太重，是扭曲了這項活動的良好用意的一個主因。那些借助這一錯誤想法而興辦的「商業活動」，就更不用提了。這樣做，數學競賽不單未能增長學生對數學的內在興趣，不能促進他們對數學的熱情，更剝奪了一項有意思的課外活動的趣味和意義。於是，數學競賽加諸青少年身心的只是「苦」，不是「樂」。

還有，為了爭取高分只操練學生做「奧數」題目，可能會對青少年的整體成長有負面影響，不單在各學科（或於數學科本身！）的學習而言，而且對個人身心成長也沒有好處。特別地，我感到失望是看不到數學競賽為本地數學文化帶來朝氣；相反地，很多人錯誤地以為那些艱深的「奧數」題目就是數學的巔峰，因而認為數學是非常困難的學科，不是一般人可以掌握的 [9]。

結論

整體而言，我十分佩服那些參加數學競賽的青少年的才華，很多時我嘗試解答一些競賽題目，費了九牛二虎之力作出來的，他們只要一瞬間便找到正確答案，而且作答條理清晰。我也非常尊敬主辦競賽人員的熱忱，他們相信健康的數學競賽有其價值，並在多方面造福數學界。

一個反對數學競賽的理由是，參賽者要在指定時間，即三至四小時間，完成作答。有人認為這個限制損害了做數學的自身智性樂趣。Peter Kenderov 在一篇詳盡論述數學競賽和數學教育的文章中，論說了這個限時作答的條件是如何不利於那些有創意思維的「慢熱選手」。他並且指出，有些做數學研究的重要特質，傳統數學競賽並不鼓勵，但這些特質都是作出優質數學研究不可或缺的，它們包括：「構思問題的能力和提出題目的能力，提出、評價和推翻猜測的能力，找到新穎獨特想法的能力」。他還指出，所有這些活動都「需要大量思考時間，需要上圖書館或上網找資料，需要與同儕或專家一同工作，這裡沒有一項是傳統競賽所容許的。」[3, pp.1592]

我的一位好友——Tony Gardiner——有豐富的數學競賽經驗，曾經四度率領英國 IMO 隊參加比賽。他閱畢我於 1995 年寫的文章 [4]，批評說我不應該把數學競賽的壞處全部歸咎於競賽本身；他接著開導我，要我知道，數學競賽應該被視為有趣的數學活動的冰山一角，它可以是個誘因，為廣大對數學有興趣的學生提供不同種類的數學活動。為了讓大多數人得到益處，除了舉辦數學競賽外，我們還可以考慮其它活動，例如成立數學俱樂部或出版數學雜誌，好讓那些對數學有濃厚興趣的青少年可以與別的人分享他們的熱誠和想法；其它如組織解題工作坊，舉辦深淺高低程度不同的專題創作比賽，閱讀書本或文章後寫作報告，製作漫畫、錄像、軟件、玩具、遊戲、數學謎題⋯。我希望人們能夠從這個角度去看數學競賽，那麼，這篇文章提及有關數學競賽的缺點便會一掃而光！

讓我以一首打油詩作結尾：

數學競賽論短長，
宜應費心作思量，
好處添益壞處防，
如此方能樂洋洋！

參考資料

[1] Djukić, D., Matić, I., Janković, V., Petrović, N., *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads*, *1959-2004*, New York: Springer-Verlag, 2006.

[2] Jedwab, J., What can be used instead of a Barker sequence? *Contemporary Mathematics*, **461** (2008), pp. 153-178.)

[3] Kenderov, P.S., Competition and mathematics education, in *Proceeding of the International Congress of Mathematicians: Madrid,August 22-30, 2006,* edited by Marta Sanz-Solé et al, Zürich: European Mathematical Society, 2007, pp.1583-1598.

[4] Siu, M.K., Some reflections of a coordinator on the IMO, *Mathematics Competitions*, **8(1)** (1995), pp. 73-77.

[5] http://www.batmath.it/matematica/raccolte_es/ek_competitions/ek_competitions.pdf

[6] http://www.imo-official.org/

[7] http://www.komal.hu/info/bemutatkozas.h.shtml

[8] http://www.maa.org/awards/putnam.html

[9] 蕭文強，從數學奧林匹克談起，《遠見雜誌》，第 74 期（1992），143 頁。