數學、數學教育和滑鼠

蕭文強
香港大學數學系

1．滑鼠

見到題目，讀者會猜測文章一定是與 IT（Information Technology, 資訊科技）有關。他們猜對了；不過他們會大失所望，因為文章並不討論如何利用 IT 教授數學。本文作者沒有足夠資格討論如何利用 IT 教授數學，文章要討論的重點，在本節結束前會有明確分曉。

讓我直截了當先談滑鼠（mouse，亦稱鼠標）這東西。Stanford Research Institute 的 Douglas. C. Engelbart 帶領一隊研究人員專研人類與電腦互動平台，有多項發明，其中一項是今天我們稱之為滑鼠的東西，於一九六八年十二月九日面世。原始的滑鼠是一個裝有兩個金屬滾輪的木盒，一九七〇年十一月他取得這項裝置的專利權，形容它為「展示系統的 $X-Y$ 顯示器」。[1，Chapter 3]

在一篇一九六三年發表的文章，Engelbart 已經預言今天電腦所擁有的一般特質 [2， p.49]：

> 「在這個階段，人們可以把正在處理的概念的代表符號展示在眼前，並且可以把這些符號移動、儲存、提取，按照極其複雜的程序操作。人們只需要提供最小量的信息，便能運用互相配合的特殊技術設備，使電腦作出迅速回應。」

除卻技術設備以外，Engelbart 在文章中宣告一項關鍵訊息，即是電腦不單是提高效率的工具，它還能提升智慧，因而改變我們對這個世界的思想方法。在 [2，p.49]他說：「我們可以設想一些比較淺易的方法。增加操作外在符號的能力，再而設想接著而來在語言和思想方法的改變。」以文字處理為例，他描述了文字處理

器的原理，評論它對書寫的影響，認為它並非只是提供快速打字功能那麼簡單。[2， p.41-42]：

> 「因此，這個假設的書寫機器能讓你用一種嶄新的方法處理寫作。例如，你可以從舊的草稿中提取摘錄，從新排放，再以打字方法加上字句或段落，便能迅速撰寫新的草稿。因而你的第一草稿只代表以任何次序無拘無束地湧現的意念。在你檢查曾經出現的想法時，會不斷激發新的考慮因素和意念， ... 如果你能快速及靈活地改變工作記錄，便可以更容易整合新意念，令創作更加順暢。」

這篇文章的主旨，是要討論這些新科技如何影響數學的學習與教學。

2．數學科（在學生與公眾心目中）的當前狀況

最近我看了一本書，題為《誰需要古典音樂呢？文化選擇與音樂價值》（*Who needs Classical Music? Cultural Choices and Musical Value*, Julian Johnson），其中有以下幾段話：

> 「音樂教育工作者的處境很困難，他們嘗試講授一些學生很少機會在課堂以外碰到、更不用說要運用的東西，這樣做不單在課堂裡受到學生抗拒，在課堂外受到的阻撓也愈來愈大。即使行內人也對古典音樂宣稱的功能多了自我懷疑，這樣，於音樂教育明顯做成影響。新的作風變成多元化，只求討好所有人，不可冒犯任何人。因此，教育制度一如市場機制：學生可以選擇多種不同的產品。不過，因為對產品缺乏深入分析，他們不可能作出有意義的選擇。」[5, pp.118-119]

> 「我的論點中心是：古典音樂與眾不同，是在於它刻意注重自身的音樂語言。它能稱為藝術，是因為它對本身的內容及其規格式樣情有獨鍾，不僅考慮對象及社會功能而已。」[5, p.3]

> 「... 它與日常生活有切身的關係，但又不是迫切的；即是說，它由我們的直接經驗取材然後加工，用另一種方式表現出來。如此，它與日常生活保持一定距離，卻同時與日常生活保持某種關係。」[5, p.5]

我對這幾段話產生共鳴，因為如果把「（古典）音樂」換作「數學」， 這些話也描述了實況：數學教育和音樂教育面對同樣的困境。由此引出另一個問題：數學群體是否過份只關注自身而自視過高呢？

諷刺的是：當無人否認數學是重要且實用的同時，這門學科對公眾的吸引力卻不斷下降——學習動機下降，熱情下降，認真程度下降，因而選修數學的本科生人數也下降。為什麼呢？有很多外在因素，其中有些不是數學群體可以控制的。但是，還存在一些內在因素需要數學群體自省。在這篇文章我將會集中討論一些與 IT 有關的內在因素。（也許我要先指出，對我而言，這些「因素」並不一定帶有負面的標簽，我只是希望從中反思。）

三．我們的一些學生是怎樣的

讓我們馬上來到課室看看，很多老師（至少我）會對下面描述的情況同樣感到沮喪：[9, p.7]

> 「你有沒有遇到做一般普通刻板運算也莫名其妙地出錯的學生？
> 你有沒有遇到忘記你去年教的、上學期教的、甚至上星期教的東西的學生？
> 你有沒有遇到在測驗時懂得做普通計算題卻不懂得在其他場合使用這些技巧的學生？
> 你有沒有遇到好像什麼都明白了（因為他們測驗都取得及格）但卻抱怨什麼都不明白的學生？」

以下我敘述兩個課堂經歷的事例：

（1） 在微積分課堂的考試上，我讓學生做一道相當常見的題目：平面 $x+y=1$ 與曲面 $z=xy$ 相交於某曲線，求這條曲線（由 Oxy-平面上起計）上最高點及最低點。

這道題目可以視為滿足某約束條件的極值問題，甚至化作單變數的極值問題。其實，即使只懂得中學數學的二次型知識，已足以解決這道題目。可是，除了正確答案以外，我還讀到以下的“答案”。

“答案 1”：$z = xy$ 及 $x + y = 1$。故 $xy - z = x + y - 1$，即 $xy - z - x - y + 1 = 0$。
置 $F(x, y, z) = xy - z - x - y + 1$，則 $\frac{\partial F}{\partial x} = y - 1 = 0$，$\frac{\partial F}{\partial y} = x - 1 = 0$，
$\frac{\partial F}{\partial z} = -1 = 0$。這是不可能的，所以極值點並不存在。

“答案 2”：$z = xy$ 及 $x + y = 1$。故 $xy - z = x + y - 1$，即 $z = xy - x - y + 1$。
$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 1 = 0$，$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 1 = 0$，由此得臨界點為 $(1,1)$。由於
$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 1^2 - 0 = 1 > 0$，可知 $(1,1)$ 是個鞍點。

“答案 3”：$z = xy$ 及 $x + y = 1$。故 $(x + y)^2 = 1$，即 $x^2 + y^2 + 2xy = 1$，亦即
$x^2 + y^2 + 2z = 1$，或 $z = \frac{1}{2}\left(1 - x^2 - y^2\right)$。$\frac{\partial z}{\partial x} = -x = 0$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -y = 0$，
由此得臨界點為 $(0,0)$。由於
$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0^2 - (-1)(-1) = -1 < 0$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -1 < 0$，可知
$(0,0)$ 是取局部最大值的點。

“答案 4”：$z = xy$ 及 $x + y = 1$，故 $\frac{z}{x} = y = 1 - x$，即 $z = x - x^2$，亦即
$z - x + x^2 = 0$。置 $F(x, z) = z - x + x^2$，則 $\frac{\partial F}{\partial x} = -1 + 2x = 0$，
$\frac{\partial F}{\partial z} = 1 = 0$。這是不可能的，所以極值點並不存在。

如果學生繪出幾何圖形，答案便顯而易見，從而察覺以上每一“答案”的錯誤。但是有些學生只熱中於解題的“獨步單方”而不自覺地局限了自己的視野，就像馬兒戴上遮眼罩一樣。

（2） 在抽象代數課，我給學生出了一道頗為標準的習作：定義影射 $F:\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ 為 $F(f(X))=f(\sqrt{2})$，試證明 F 是個環同態，是滿射但不是單射。

有一位學生前來對我說他不懂得怎樣做。他能說出環同態的正確定義，但我看得出他並不理解其中的含意，只是死記硬背單射同態、滿射同態這些名詞。當我詢問他有什麼困難時，他含含糊糊地說：「我讀到同態那一節，課本上說它涉及兩個元 x_1,x_2；你知道喇， $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ ， $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$ ，...。你必須利用 x_1,x_2 作計算，事情變得有些複雜，...讓我在 $\mathbb{Z}[X]$ 取兩個元 x_1,x_2 ，那麼 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ ；咦，那不是我在線性代數課上學過的東西嗎？但現在我需要考慮 $F\big(f(x_1+x_2)\big)=\dots$ ，怎樣才可以插入那個 $f(\sqrt{2})$ 呢？我沒有辦法把 $f(\sqrt{2})$ 放進去！」我向他指出那兩個元 x_1,x_2 都是整系數多項式，未定元為 X; 再問他 $f(x_1+x_2)$ 究竟是什麼，甚至他寫下的 f 究竟是什麼時，他一臉惘然之色！

奇怪的現象是：學生似乎不明白首先必須弄清楚問題是什麼，他們只是盡量抓著不放一些看似熟識或曾經學過的東西，他們沒經思考卻希望借助這些東西去處理當前的問題。其實，把已學的東西與新學的東西連結起來，不失為一個好主意，而且是很好的訓練。但是，他們的輕率態度，他們不作深入思考而急於找到答案的做法，值得我們關注。

很多時候，不是數學內容本身難倒學生，最少起初仍然不是；而是他們還未碰到數學內容已被難倒！他們不能安靜地坐下來思考問題。當然，安靜地坐下來思考不能保證一定能解決問題，但至少可以弄清楚問題是什麼和明白困難所在，否則只能養成一種亂打亂撞的心態（在本文將稱此為“滑鼠點擊”心態）。更壞的情況是，如果學生不知就裡而擊中（其實他不明白自己為何作此一擊），便深信已經明白箇中道理，但事實並非如此；如此得來的混亂知識，終有一天會成為他的學習障礙。

四．關於學習數學

在 [13] Henri Poincaré 說：「無疑，要教師講授一些他自己並不完全滿意的東西，並不容易；不過，教師自身的滿足感並不是教學的唯一目的。我們首先要關心學生的思想狀況，以及我們祈望他們達致什麼境界。」設法了解學生如何學習是非常重要，即使每個人學習的方法不盡相同。Seymour Papert 在 [11，第五章] 創造了個名詞“mathetic”代表學習的藝術，類比於“pedagogy”代表教學的藝術。正正如是，“mathematics”（「數學」）在希臘字源表示「那些要學的東西」，因此，數學就是要學的東西，而不只是要教的。

究竟這一代的學生怎樣學習呢？美國時代週刊出版的一期特刊（2003 年 8 月 25 日──2003 年 9 月 1 日）封面上有這樣的大標題：《超級兒童：科技如何改變人類的下一代？》。裡面刊載一篇以「上網學習」為題的文章，文中有兩點值得注意：

> “兒童的腦袋愈來愈擅長於處理各種視覺資訊。”
> “孩子們愈來愈善於在同一時間處理多項事情，不過代價是，他們不能深入了解其中任何一項。”

IT 時代培養了新的一代，他們與上一代，即是他們的父母或老師，有不同的工作習慣、學習習慣、以至思想方式。年青的一代對外來刺激反應快得多，更能同一時間處理多項工作；另一方面，他們卻欠缺上一代的耐性和專注，較少願意把單一項工作完成至一定深度。對於上述情況，有不少書本討論其優點（例如 [10，12] ）及其缺點（例如 [16，17]）。雙方的意見，我們都應該聆聽。

如果我問學生：已知量 A 是小於、或相等、或大於己知量 B 呢？很多學生會馬上啟動腦袋裡的“滑鼠”，以下是可能的對話：

「小於？」
「錯。」
「大於？」

「錯。」
「等如。」（中了！）

不過我不會以「對」或「錯」回應學生的答案，而以「為什麼？」去引導他們思考；可惜的是，大部份人不願意思考。他們慣於用滑鼠快速地得到「對」或「錯」的答案，以錯了又再試的反覆試驗方法（trial and error）來學習。用滑鼠找答案，就算錯了，時間上也無損失，反而思考如何得到合理的答案更花時間。因此，我們毫不奇怪為什麼今天沒有多少學生有足夠耐心去明瞭一些例如下述的問題：*有一次，甲斷言乙否認丙宣佈丁是說謊者。已知甲、乙、丙、丁每人各自說三句話中只有一句是真實的，問這一次丁說真話的可能性有多大？*（這問題由英國天文學家數學家 Sir Arthur Stanley Eddington 在一九五〇年提出，刊載於 American Mathematical Monthly 第 57 期，在 [3] 有解釋。）碰到這樣的問題，腦海裡並沒有“滑鼠”可以點擊！有些學生被問題的趣味吸引著，還願意保持一點耐性努力去嘗試解答。但是，他們若碰到一些是數學課本裡較標準的習題、而要求有如花在上題的工夫才能明白時，反應又如何呢？例如：設 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是個連續函數，S 是 R 的一個子集。如果每個在 S 的數列都有一個子數列收斂於 S 內的某個數，試證明對任何正數 ε，必存在正數 δ 滿足以下條件，當 x 和 x' 是 S 內的數且 $|x-x'|<\delta$，則 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$。（一項相關的、值得辯論的要點：我們今天是否應如過往那樣重視這類問題呢？）

我們仍然傾向於告誡學生：學習數學時，如果碰到複雜的情況，應該冷靜、集中精力去處理問題。誠然，對於其他一些科目，「點擊滑鼠」可能已成為一種普遍使用的方法，甚至是更有效的方法。有一些情況，用滑鼠點擊所有可能的答案所花的時間，比事前有根有據地選擇正確答案為少；有一些情況，影像展示帶來的訊息，比抽象演繹方法為多。在這種文化中成長的學生，我們能否說服他們事實並不一定是如此呢？我們應該讓他們知道，「點擊滑鼠」方法，在學習數學上是行不通的，因為有很多情況，沒有一位「高人」在旁，可以每次替他們決定那一項選擇是正確的答案。

在這個 IT 年代，我們應該保持深入思考這一優良傳統；前人清楚解釋了這一點。《周髀算經》是現存最古老的中國數學書籍，相信是公元前五世紀至二世紀編寫的，其中載有容方和陳子的對話：

> 容方曰：... 今若方者。可教此道邪。
> 陳子曰：... 然。此皆算術之所及。子之於算。
> 足以知此矣。若誠累思之。
> [容方]曰：方思之不能得。敢請問之。
> 陳子曰：思之未熟。此亦望遠起高之術。
> 而子不能得。則子之於數未能通類。是智有
> 所不及。而神有所窮。夫道術言約而用博者。
> 智類之明。問一類而以萬事達者。謂之知道。
> ...夫道術所以難通者。既學矣。患其不博。
> 既博矣。患其不習。既習矣。患其不能知。
> ...是故。能類以合類。此賢者業精習肖之質也。...

意譯如下：

容方說：... 像我這樣愚蠢的人可以學習數學嗎？
陳子說：當然可以。你學懂了的基本算術已經足夠令你可以繼續學習。
（幾天後，容方再去找陳子。）
容方說：我還是想不到；可否再請教你呢？
陳子說：這是因為雖然你想過，但未達到思考成熟... 。你不能把你學過的融會貫通。... 涉及的數學雖然簡單，很容易解釋，但卻有廣泛應用。明白了一類問題後，可以引伸至其他類別的問題。... 精通數學之難處在於：學懂了卻擔心未達到廣博，達到廣博了卻擔心實習不足，實習足了卻擔心理解的能力；能夠比較和對照各類問題的人，才是有智慧。

5．三個與內容有關的例子

電腦科技的不斷發展，可能改變數學教學內容的要點，又或者改變數學的教學法。有些數學內容過去是教學重點，今天或不需要如此重視，或應以另一觀點教授。雖然我已聲明自己沒有足夠資格討論數學教學如何結合 IT，但我得承認 IT 在數學教學上擔當一定的角色。這個問題，一方面因為我的專門知識不足夠，另一方面因為內容太專門，不適合在本文討論，不過，我會用三個例子說明一些有趣的要點。

(1) 在一九八〇年代某堂課上我使用一具可寫作程式的袖珍計算器去顯示以多項式近似符合一個給定的函數，也就是該函數的 Taylor 級數表示。今天使用電腦的話會更生動，收斂的性質會更清晰（見圖 1）。

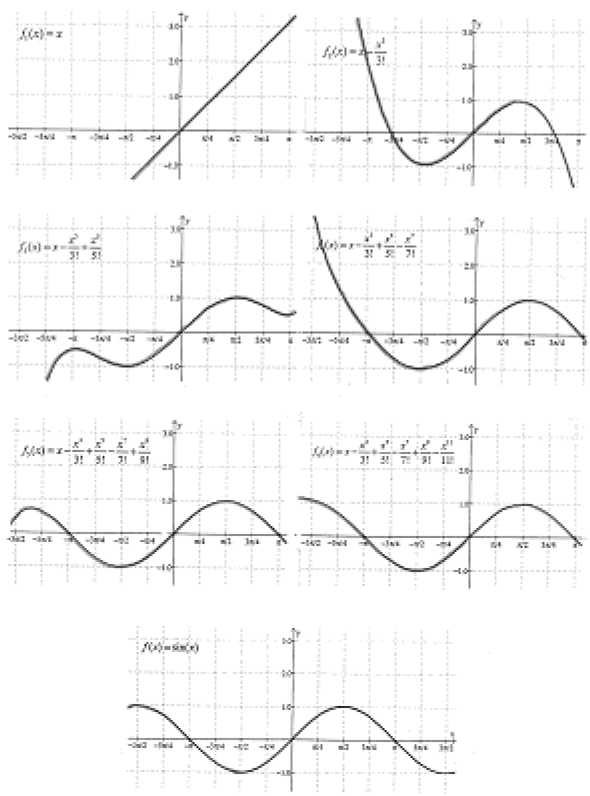

圖 1

但那絲毫沒有抹煞理論討論的重要，譬如看看 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的情況（見圖 2）。

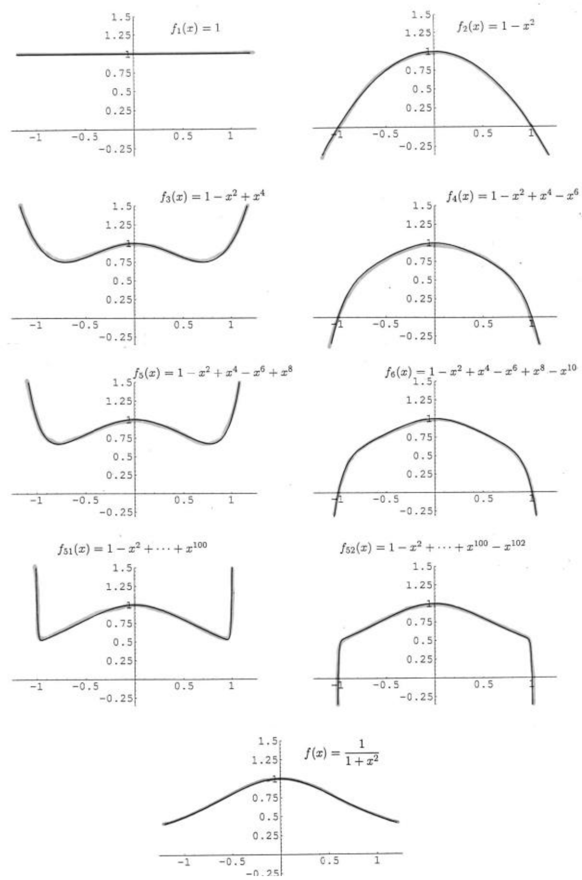

圖 2

這個函數的情況與先前那個正弦函數有何分別呢？即使計算了很多項也看不出端倪，學生會感到困惑，但那是好事。在 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的情況，在開區間 $(-1,1)$ 外面發生了什麼事呢？在 $f(x)$ 中置 x 為 1 或 -1 仍然看不出苗頭來。要全盤明白這一回事，我們需要從理論角度著手，把 $f(x)$ 看成是複數域上的函數，事情才看得透澈。

如果多項式不能達致近似符合的目的，有沒有別的函數可以用呢？一些理論考慮再輔以電腦影像展示，學生便會了解到 Fourier 級數的力量了（見圖 3）。

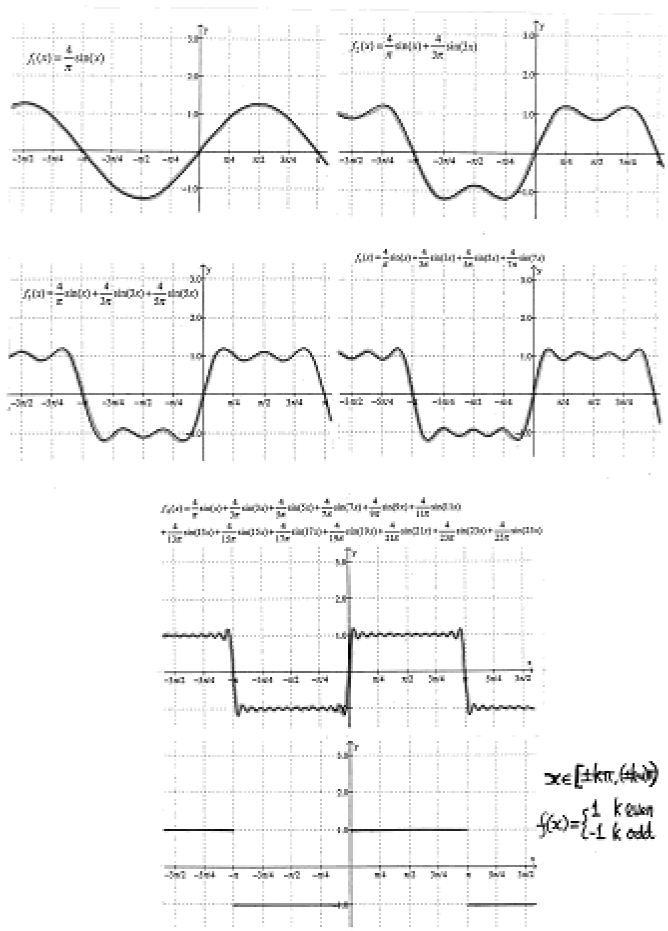

圖 3

(2)　　法國數學家 Pierre Varignon 在十七世紀證明了一條有名的平面幾何定理：若 A, B, C, D 是任意四邊形 $PQRS$ 的邊上的中點，則 $ABCD$ 是個平行四邊形（ 見圖四 ）。

Theorem If A, B, C, D are the midpoints of the sides of a quadrilateral $PQRS$, then $ABCD$ is a parallelogram.
(Pierre Varignon, 17th century)

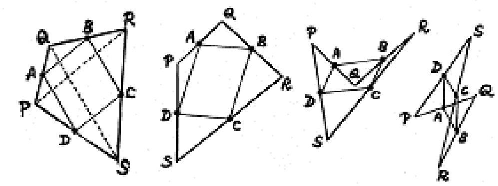

圖 4

運用電腦幾何軟件 CABRI 或 SKETCHPAD 學生可以隨意更改 $PQRS$ 的形狀獲致這份驚喜；四條邊上的中點 A,B,C,D 永遠組成一個平行四邊形。接著，他們可以開始思考如何證明這個有趣的現象。London University 的 Institute of Education 的 Celia Hoyles 提出一項更深刻的觀察，就是 Varignon 定理的強逆定理 [4]。先給定四點 A,B,C,D。取任何點 P 開始做以下的構作。連結 PA，延長至 Q 使 $PA=AQ$。連結 QB，延長至 R 使 $QB=BR$。連結 RC，延長至 S 使 $RC=CS$。連結 SD，延長至 T 使 $SD=DT$。一般而言，我們不預期 T 和 P 相合。如果 T 和 P 真的相合，我們便得到一個四邊形 $PQRS$，以 A,B,C,D 為其邊的中點。有趣的問題是：什麼時候 T 和 P 相合呢？再一次運用 CABRI 或 SKETCHPAD，學生不難察覺到當 P 走動時，TP 其實是一段長度不變方向不變的線段。這是一個有用的線索，導致運用向量去證明 T 和 P 相合當且僅當 $ABCD$ 是個平行四邊形。

如果我唸中學時有 CABRI 或 SKETCHPAD 那多好！在中學時代我愛做歐氏平面幾何的題目，回頭看那些日子，我嘗到發現的樂趣，也嘗到明白一些既是可觸及的實在（你至少可以從畫圖中看到發生什麼，雖然起初你仍然不明白為何那些事情會發生），但又不明顯（起初你不知道為何會如此）的現象。幾何是讓人可以同時訓練邏輯紀律但又培養天馬行空想像的一個科目。在中學時代，為了讓自己對一個問題更熟悉了解，我畫了不少的圖，但無論我手繪多少圖，當然遠遠及不上用 CABRI 或 SKETCHPAD 那麼有效率及富有啟迪作用。

(3)　　最後這個例子取材於香港大學教育學院 Francis Lopez-Real 和 Allen Leung（梁玉麟）的研究工作 [7]，也是關於歐氏平面幾何，但試圖帶出另一要點。他們的研究涵蓋範圍更廣，是關於 DGE（Dynamic Geometry Environment）。首先他們著學生運用 CABRI 解以下問題：構作一直線段 *AB*，把 *AB* 分成三等份。構作方法頗簡單，在 *AB* 上取任意一點 *C*，以 *C* 為中心以 *AC* 為半徑構作一個圓，切 *AB* 於 *D*。再以 *D* 為中心構作一個同樣大小的圓，切 *AB* 於 *P*。把 *C* 沿 *AB* 拉至使 *P* 和 *B* 相合，則 *C* 相應地給拉至 C'，*D* 相應地給拉至 D'，便有 $AC'=C'D'=D'B$ 了。

有趣的事情是把這個手法用於給定 $\angle AOB$，取圓弧 *AB* 上任意一點 *C*，構作等角 $\angle AOC$，$\angle COD$，$\angle DOP$，其中 *D*，*P* 也在圓弧 *AB* 上。把 *C* 沿圓弧 *AB* 拉至使 *P* 和 *B* 相合，則 *C* 相應地給拉至 C'，*D* 相應地給拉至 D'，便有 $\angle AOC'=\angle C'OD'=\angle D'OB$ 了（見圖 5）。

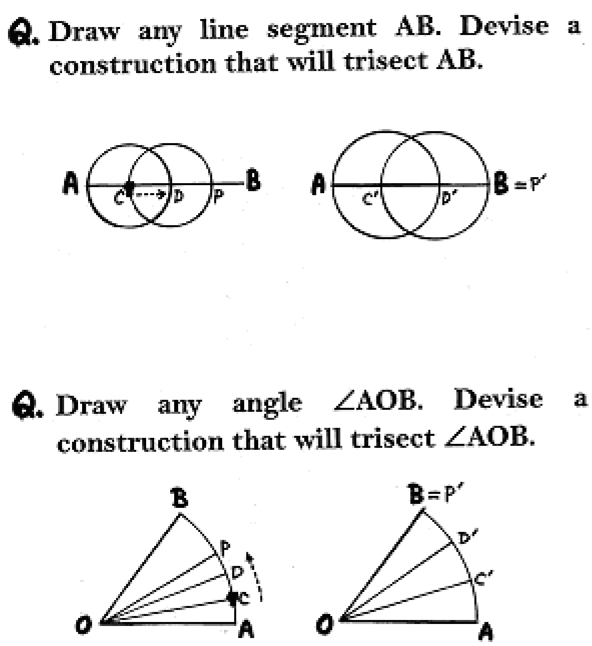

圖 5

兩個構作有沒有基本差異呢？從理論角度看，我們曉得古典幾何構作方法能三等分一個線段但不能三等分一個角。因此，DGE 中有些額外的元素給加進了。一個可以探討的問題是：利用這種新工具，有那些構作問題可以被解決呢？如同歷

史上數學家研究在古希臘幾何裡有那些構作問題可以被解決呢？我也由此想到，科技如何影響數學發展？如同直尺和圓規啟發了古希臘數學家研究構作問題，從而導致新的數學方法及理論出現 [8]，在未來的日子裡，IT 導致新的數學方法及理論出現，一點也不奇怪。

6．後語

二〇〇四年一月某日丹麥報章 *The Copenhagen Post* 的頭條是：

「重拾片件：樂高於二〇〇三年出現歷史性虧蝕，管理層大調整。」

二〇〇三年丹麥巨型玩具生產商樂高（Lego，其名出自丹麥語 *LEg GOdt*，意思是“開心玩”）虧蝕高達一億八千八百萬歐羅，其中一個原因是投資策略上的錯誤。近年來樂高太著重生產與流行電影及書籍有關的玩具，這些“目標為本”的產品雖然是精密、時髦，但同時也是“一次過”的。相比下，一套簡單的樂高積木可以任由人按照自己的創意砌出各種不同的玩意兒。因此，樂高的行政總裁宣佈將再主力生產他們的基本產品：樂高積木。

數學老師從這一事件中得到什麼教訓呢？我認為那是一項有力的提示：數學課堂不適宜只為某些特定用途而廣泛使用 IT；長遠來說，注重基本概念對學習更為有利。學生需要學習和掌握什麼基本概念呢？IT 可以怎樣幫助學生學得更好，而不會局限他們的審慎及深入的思考能力呢？怎樣保証發現法並不等同胡猜亂想的策略、富於想像的態度並不等同漫不經心的態度、同一時間進行多項工作的能力並不等同馬虎倉促完事、使用 IT 並不等同不經思考地只按指示逐步進行呢？這些問題都是數學教育工作者在這個 IT 年代需要思考的。

第二節曾討論古典音樂，我們現在再讀一段有關古典音樂的文章摘錄，文章題目是「不合調」，刊於二〇〇三年四月五日英國報章 *Financial Times*：

> 「...相繼由教會、貴族社會、資產階級孕育及培養出來的古典音樂，在「微波爐文化」中不合時宜，它的價值，在於紀律、專注、自我完善、獨特個性、靈性 / 哲學沉思等等，都是少數受教育者的價值。」

在這一段摘錄裡，我們可以再一次把“古典音樂”換作“數學”。Julian Johnson 在他的書裡也表達相似但更強烈的感受 [5， p.89]：

> 「我們生活在一種“即食”文化 (digest culture)；在“即食”文化中，人們不願意作持續思考，這種情緒很快演變為敵視持續思考的態度；不久，敵視態度更遮掩了不能從事持續思考的能力。」

不願作*持續思考*（*sustained thought*）的危險確實存在；數學的顯著特點與 IT 時代的流行文化之間，有一種內在的“不協調”。但是，這種“不協調”，不應被看成是一種“矛盾”。我們要明白在 IT 的年代，思想不集中與深入思考間，存在著一種張力；但是，人們不可能永遠都同樣活躍，而不停下來用心思想。我以中國經典名著《大學》的一段話作為結束：

> 知止而后有定。定而后能靜。
> 靜而后能安。安而后能慮。
> 慮而后能得。物有本末。
> 事有終始。知所先後。則近道矣。

參考文獻

[1] Bardini, T., *Bootstrapping: Douglas Engelbart, Coevolution, and the Origins of Personal Computing*, Stanford University Press, Stanford, 2000.

[2] Engelbart, D.C., A conceptual framework for the augmentation of man's intellect, in*Computer-supported Cooperative Work: A Book of Readings*, edited by I. Greif, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, 1988, 35-65; originally published in *Vistas inInformation Handling, Volume I*, edited by P. Howerton, Spartan Books,Washington,D.C., 1963, 1-29.

[3] Feller, W., The problem of *n* liars and Markov chains, *Amer. Math. Monthly*, 58 (1951), 606-608.

[4] Hoyles, C., Varignon's big sister, in *The Changing Shape of Geometry: Celebrating a Century of Geometry Teaching*, edited by C. Pritchard, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, 177-178.

[5] Johnson, J., *Who Needs Classical Music? Cultural Choice and Musical Value*, OxfordUniversity Press, Oxford, 2002.

[6] Legge, J., *The Chinese Classics, Volume I: Confucian Analects, the Great Learning, the Doctrine of the Mean*, Clarendon Press, Oxford, 1893; reprinted edition, Hong Kong University Press, Hong Kong, 1960.

[7] Lopez-Real, F., Leung, A.Y.L., Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments, to appear in *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*.

[8] Martin, G.E., *Geometric Constructions*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] Mason, J.H., *Mathematics Teaching Practice: Guide for University and College Lecturers*, Horwood Publishing, Chichester, 2002.

[10] Negroponte, N., *Being Digital*, Coronet Books, London, 1996.

[11] Papert, S., *The Children's Machine: Rethinking School in the Age of the Computer*, Basic Books, New York, 1993.

[12] Papert, S., *The Connected Family: Bridging the Digital Generation Gap*, Longstreet Press, Athens, 1996.

[13] Poincaré, H., Les définition en mathématiques, *L'Enseignement Mathématique*, 6 (1904), 255-283 (English translation in *Science and Method* by H. Poincaré, 1914; reprinted in 1952, 1996).

[14] Siu, M.K., "Less is more" or "less is less"? Undergraduate mathematics education in the era of mass education, *Themes in Education*, 1:2 (2000), 163-171.

[15] Siu, M.K., Learning and teaching of analysis in the mid twentieth century: a semi-personal observation, in *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique: Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century*, edited by D. Coray et al, L'Enseignement Mathématique, Genève, 2003, 179-190.

[16] Stoll, C., *Silicon Snake Oil: Second Thoughts on the Information Highway*, Anchor Books, New York, 1996.

[17] Stoll, C., *High-Tech Heretic: Why Computers Don't Belong in the Classroom and other Reflections by a Computer Contrarian*, Doubleday, New York, 1999.

[本文是 2004 年 12 月在第三屆華人數學家會議上的英語講演，文稿刊於 *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*， 42 (2008) ， 861-874，亦轉載於星加坡數學會雜誌 *Mathematical Medley*， 33(2) (2006) ， 19-33。本文由作者及陳鳳潔合譯，載於蕭文強 :《心中有數》， 九章出版社, 2009 年， 31-49 ; 大連理工大學出版社， 2010 年， 34-56。]