# 我看「大眾數學」

**蕭文強**

我們常常聽見這樣的話：“隨著時代進展，社會、經濟、科技各方面形勢今昔有別，數學教育亟需因應這些轉變作出改革。”究竟是甚麼主要因素迫使這種改革呢？大別而言，我看可分爲兩個層次。其一乃技術層次。譬如說以前沒有計算器，較繁複的計算只能依靠對數表，於是所有學生必須學懂熟練運用對數表；如今不只有了計算器，叫對數表失寵了，甚至更先進的電腦也日趨普遍，作爲現代公民又得認識這項新事物，學懂運用它。又譬如說現代公民最好具備基本的統計知識，也最好懂一點運籌學。但在二十多年前這些學問只有數學專業學生才能在大學甚至研究院裏碰上。其二乃社會層次。即是說，社會發展一方面對公民素質提出新的要求，另一方面它又影響了社會上的價值觀，從而影響了學校裏的學習環境和風氣，帶來新的教育問題。顯然這兩個層次絕非沒有關連，但總的來說後者比前者複雜多了，也深刻多了。因爲它不單涉及教甚麼不教甚麼的問題，更涉及怎樣教以致教育目的整體重訂的問題。我們甚至不妨說，後者統率了前者。雖然明知眼高手低，讓我趁這個筆談機會對後者提出一些近乎烏托邦的管見。既云烏托邦，自有不容易實現的意思，但尋夢的人總還要有的，況且夢想亦非注定不能成真吧？

現代社會趨向開放、多元化、資訊流通、高科技發展。它要求每一位公民具備一定的知識、技能和素養，能吸收也能分析事物信息，又能綜合和傳意，非僅機械化地執行指令而已，此所謂民智。由於各方面發展迅速，學校的使命不再是要教懂學生一輩子生活所需的知識技能，而是要爲學生提供終身學習的鞏固基礎，學校要培育的是一批又一批懂得現代文明、具備現代眼光襟懷的公民。社會對公民有這樣的要求，教育便得普及至全部適齡的兒童和青少年，因此任何現代社會均以普及教育廣開民智爲己任。這一點本身乃好事，但由於社會壓力它也帶來新的教育問題，特別如果我們不對課程內容及教學目標作出相應調整的話，學校和社會之間的脫節現象只會日顯嚴重。

在普及教育制度下，所有適齡兒童和青少年都要入學，學生多了，他們的家庭背景不一、學習動機不一、學業進度不一，他們各自有不同的學習經驗和習慣，各自對前途有不同的期望和志向，新的教育問題由此產生。（我這樣說，絕對不是暗示普及教育不應實行，也不是暗示這種種不同有何不妥，根本上多元化社會就是這樣的。我只想指出普及教育可不單是學生數目增加那麼簡單，而是整個教育理念的改變。香港在 1978 年實施九年免費教育，法例規定父母必須送 15 歲以下的子女入學，就在不少人仍未清楚了解普及教育的理念又缺乏心理準備的情況下，普及教育新紀元在香港揭開了序幕 [1]。正因如此，其後教育界面臨一個又一個的難題，在過去十五年間這些問題引發的弊端逐漸顯露出來。以下說的雖然

是根據我對香港教育情況的觀察，但與內地某些城市的情況比較，我相信有類似的地方。至於國內鄉村地區面對的教育問題，卻是另一個極端，即是因爲缺乏經費教育不能普及。）另一方面，隨著普及教育發展，學位增多，升學機會不再如以往萬中挑一，於是以往因其篩選功能而被視作提供學習動力的公開考試消減了它在這方面的作用，從正面看是減輕了不健康的考試壓力，從負面看卻使不少學生懶散下來而不知珍惜那讀書機會。加上社會風氣所及，多數人急功近利而不尊重知識，一種消費者心態逐漸入侵學校，教育淪爲技能訓練、教師淪爲知識商販、師生關係淪爲商販顧客關係。學校的功能被視作只爲社會供輸勞動力，教育辦得成功與否完全以商管的成本回報率量度。久而久之，不只學生無心向學，但求以最少的勞力換得最合算的成績，就連辦教育的有些人也認爲普及教育必然意味程度低落，唯一應付方法就是迎合「顧客」口味，降低對學生的要求。但不要忘記，如果硬要套用市場經濟的術語，在教育這項「生產過程」當中，學生不只是「顧客」，他們同時也是「產品」！因此，豈能以這些顧客的口味作爲衡量產品好壞的唯一標準呢？固然，我們不應墨守成規而無視社會對普及教育的要求和壓力，但爲了遷就學生而片面降低對學生的要求，只會縱容一種好逸惡勞和見難即退的心態，做成人的素質下降，與普及教育目的剛好背道而馳！況且，如果身爲教師只曉慨嘆學生的素質一代不如一代，那是否低估了學生的學習能力和學習興趣呢？這種對學生的不自覺輕視態度只會對學生做成負面影響，本來有能力或者有興趣的學生也給推往無心向學去了！

數學向來被視爲小學中學教育的必修科，如同語文一樣，是非常有用的基本技能，顯然在普及教育中應佔一重要席位。但同時數學也被視爲需要具備某種天份才能應付得來的學科，又怎能說它是大眾的數學呢？因此，我們不能不先看看數學教育之目的。不同時代不同地區的數學課程綱要，就內容細節和措詞字眼而言或不盡同，但籠統扼要地說，其目的不外可歸納爲三方面：（甲）思維訓練，（乙）實用知識，（丙）文化素養。如此說來，今天(甚至明天)的數學教育與昨天的數學教育有何不同？我以爲當普及教育推行後，雖然數學教育目的還是一樣，但有兩個問題卻較以前更需要顧及，那即是教學內容的複雜性和關切性。前者問：是否大部分學生能領會教學內容？後者問：是否大部分學生認爲值得花那番工夫時間去領會教學內容？我國古代偉大數學家劉徽注《九章算術》「序言」裏已經提到：「雖曰九數其能窮纖入微，探測無方。至於以法相傳，亦猶規矩度量可得而共，非特難爲也。當今好之者寡，故世雖多通才達學，而未必能綜於此耳。」想不到這種「數學冷漠症」過了一千七百年後還是普遍流行，數學教育工作者對於導致這種現象的原因能不深思乎？讓我試提出以下三點原因：（1）數學本質之一乃抽象思維；（2）數學有它獨具的符號語言；（3）數學有它悠久的歷史。

先來談第一點。雖然我們常常從實際事物出發去構思數學對象和激發數學意念，但很快我們便不得不踏入抽象理念世界才能翱翔於數學的王國。其實，這種抽象思維能力隨著個人的教育和學識與日俱增，倒非高不可攀。而且思維乃人類

最寶貴的財產，人類文化賴它得以繼往開來，任何學科均脫離不了抽象思維，又何獨於數學？只不過數學是一門把抽象思維提升至高度的學科，提升至一定高度便叫好些人吃不消了。

再談第二點。符號語言是數學特有的語言，對不少人來說它構成主要的學習障礙，因爲不少人面對符號和公式時，沒能看透這些符號和公式背後的意義，摸不著頭腦也就容易迷失方向，長此下去便對數學畏而遠之了。但從歷史上看，正是符號語言的創設，使人的思路及表達變得清晰緊湊，帶來 16 世紀以來數學的迅猛發展；適當的符號引進後，它們能更好地突出問題的內部結構，幫助人進行抽象思維，作更深入的理解。

至於第三點，爲何數學歷史悠久反招來大眾對它的冷漠呢？原來當近代物理、化學、生物猶處於發展初期，數學已經背上二千多年的輝煌成就，但小學中學的數學課程差不多只包括在這段時期之前的數學；即使在大學課程裏，當物理、化學、生物從 19 世紀以後的發展開始闡述，一直推向 20 世紀以至當代新發現的同時，大部分學生的數學知識卻終結於 19 世紀中葉的成果！因此大部分學生對數學的近世發展不甚了了，有些甚至以爲微積分已經是數學的巔峰！而且，數學有個異於其他科學的特點，即是它是一門累積的學問，它的過去將永遠融會於它的現在以至未來當中。爲了在規定的時間內傳授一定份量的知識，爲了把數千年的數學成果濃縮於十餘年的小學、中學、大學課程內，很多時我們側重數學的技術內容，用一種表面看來清晰利落的手法迅速教懂學生這套凝聚了數千年人類智慧的特別語言。換句話說，我們把數學僅視作一種技能和一件工具去傳授。這樣做，縱使我們傳授了知識，亦必掩蓋了數學作爲文化活動的面目。學生不容易了解數學有它的生命和發展、有它的過去和未來，學生容易把數學看成是一堆現成的公式和定理，雖然正確無誤但僵硬不變且刻板枯燥，學生見到的盡是技巧堆砌和邏輯遊戲，予人閉門造車的印象。雖怪只有極少數學生被數學吸引了，也有少數一些學生明白到日後需要使用這件工具姑且把數學捱過去，其餘絕大部分學生都與數學疏離，或者厭惡害怕它、或者對它持冷漠態度。很多學生畢業後卻像完全沒有上過數學課，只當它是惡夢一場！[2]

數學教育有狹義和廣義兩方面：前者指傳授數學知識，後者較難界定，讓我把它說成是數學觀的體現。甚麼是數學觀呢？有些人以爲那是抽象的哲學觀念，其實它並不抽象，每個人都有自己的數學觀，即是自己對數學的看法，對數學本質和意義的見解。既然每個人總有自己對事物的看法，每個人便肯定有自己的數學觀。（如果有人認爲毋須理會數學的本質和意義，只要懂計算便成，那也是他的一種數學觀。）每個社會成員的觀學觀匯集起來，其主流形成該社會的數學觀。千萬不要看輕這點，千萬不要以爲數學觀與數學教學無關。就個人而言，不論你自覺也好不自覺也好，你的數學觀必定流露反映於你的教學中，從而影響了你的學生。就整個社會而言，証諸歷史，數學教育以至數學的內容和發展，決定於當時當地的數學觀。

多年前我讀了王梓坤教授寫的好書《科學發現縱橫談》[3]後得到啓發，在一次給教育學院師生的講座中談到數學上的“才、學、識”[4]。這個提法源於清代文學家袁枚的話：“學如弓弩，才如箭鏃，識以領之，方能中鵠。”正好借用以概括上面曾經提到的三項數學教育目的：（甲）思維訓練，（乙）實用知識，（丙）文化素養。於數學而言，“才”是指計算能力、推理能力、分析和綜合能力、洞察力、直觀思維能力、獨立創作力，等等；“學”是指各種公式、定理、算法、理論，等等；“識”是指分析鑒別知識再經融會貫通後獲致個人見解的能力。單是“學”的傳授，僅是狹義的數學教育而已，“才、學、識”三者兼顧才是廣義的數學教育。這種廣義的數學教育不把數學僅視作一件實用工具，而是通過數學教育達至更廣闊的教育功能，這包括數學思維延伸至一般思維，培養正確的學習方法和態度、良好學風和品德修養，也包括從數學欣賞帶來的學習愉悅以致對知識的尊重[5]。單單傳授知識，從廣義角度看自然是一個失敗，即使從狹義角度看，只著重操練數學技能也不見得傳授了知識。這樣做可能使學生應付過了考試，但卻使大部分學生喪失興趣、好奇心、批判能力和自學能力，甚至喪失傳意能力和表達能力。更諷刺的是數學本乃講求理性辯論的學科，但在大部分學生心目中卻是最專制最教條式的學科，教師乃無上權威，教師的話乃金科玉律，答案對錯不在乎學生理解孰對孰錯而在乎教師的最後裁決！學生既然感受不到一種學習愉悅，也就難於養成對知識的尊重，當社會風氣傾向於急功近利時，自然覺得讀書無用了。從幾屆國際數學教學評估測試報告中看表面結果，亞洲學生的數學測試成績排名世界前列，加上華人學生屢屢在國際數學競賽中取得佳績，華人數學工作者當中又不乏世界上一流學者，我們容易得來一種印象，中國人的數學才能很高，中國的數學教育很成功。但是我對這點卻不敢沾沾自喜，會不會我們在技術內容方面要求過高以致忽略了別的方面，而付出的代價就是那些不能在規定時限內以標準測試方式量度的品質呢？譬如說，我們是否忽略了數學的人文成份呢？有人會問：如何對數學的人文成份進行評核測試？的確，那是難以評核測試的，但是否非評核測試不可？教育也讓我們懂得待人處事之道，那又是否需要以某個考試作評核呢？

普及教育裏的數學教育應該強調廣義數學教育，即使狹義數學教育的技能訓練部分也已經隨高科技發展轉移了重心。教師不必著眼於學生懂多少條公式和定理，而應關心如何提高學生的學習動機和興趣，增強教學內容與日常生活或以往學習經驗的關切，激發學生的本有潛質讓他們自我成長，培育學生的獨立思考和批判反思能力，使學生能欣賞到數學的文化魅力。以上的改革，單憑重編數學課程內容恐難達至，須有賴教師之力，而且須有賴具備某種素質的教師之力。這種勇於迎接時代挑戰的數學教師，無論對數學、教育、認知心理、學生性向均能掌握，他們不只通達數學科的理念和知識結構，更能明白學生需要，善於引導啓發學生學習。而且他們持開放態度，不斷探索省思以求自我提升。由於他們兼顧教學上“才、學、識”三方面，我們不妨稱這種數學教師作“學養教師”[6]。

讓我用以下一段自勉的話結束這篇筆談：

爲教人而教書，由教書而教人；

學無止境，教無止境。

**參考文獻**


[1] 黃毅英。“普及教育期與後普及教育期的香港數學教育”，於《香港數學教育的回顧與前瞻：梁鑑添博士榮休文集》，蕭文強(編)，69-87 頁。香港：香港大學出版社，1995。

[2] 蕭文強。“誰需要數學史”，《數學通報》，1987 年第 4 期，42-44 頁。

[3] 王梓坤。《科學發現縱橫談》，上海人民出版社，1978。

[4] 蕭文強。“數學．數學史．數學教師”，《抖擻雙月刊》，第 53 期，1983 年 7 月，67-72 頁。

[5] 蕭文強。“數學史和數學教育 – 個人的經驗和看法”，《數學傳播》， 第 16 卷第 3 期，1992 年 9 月，23-29 頁。

[6] Siu, F. K., Siu, M. K., Wong, N. Y. (蕭陳鳳潔，蕭文強，黃毅英)， “The changing times in mathematics education; The need of a scholar teacher”，刊於 “Proceedings of the International Symposium on Curriculum Changes for Chinese Communities in Southeast Asia: Challenges of 21st Century”, 香港中文大學，1993 年 6 月，223-226 頁。